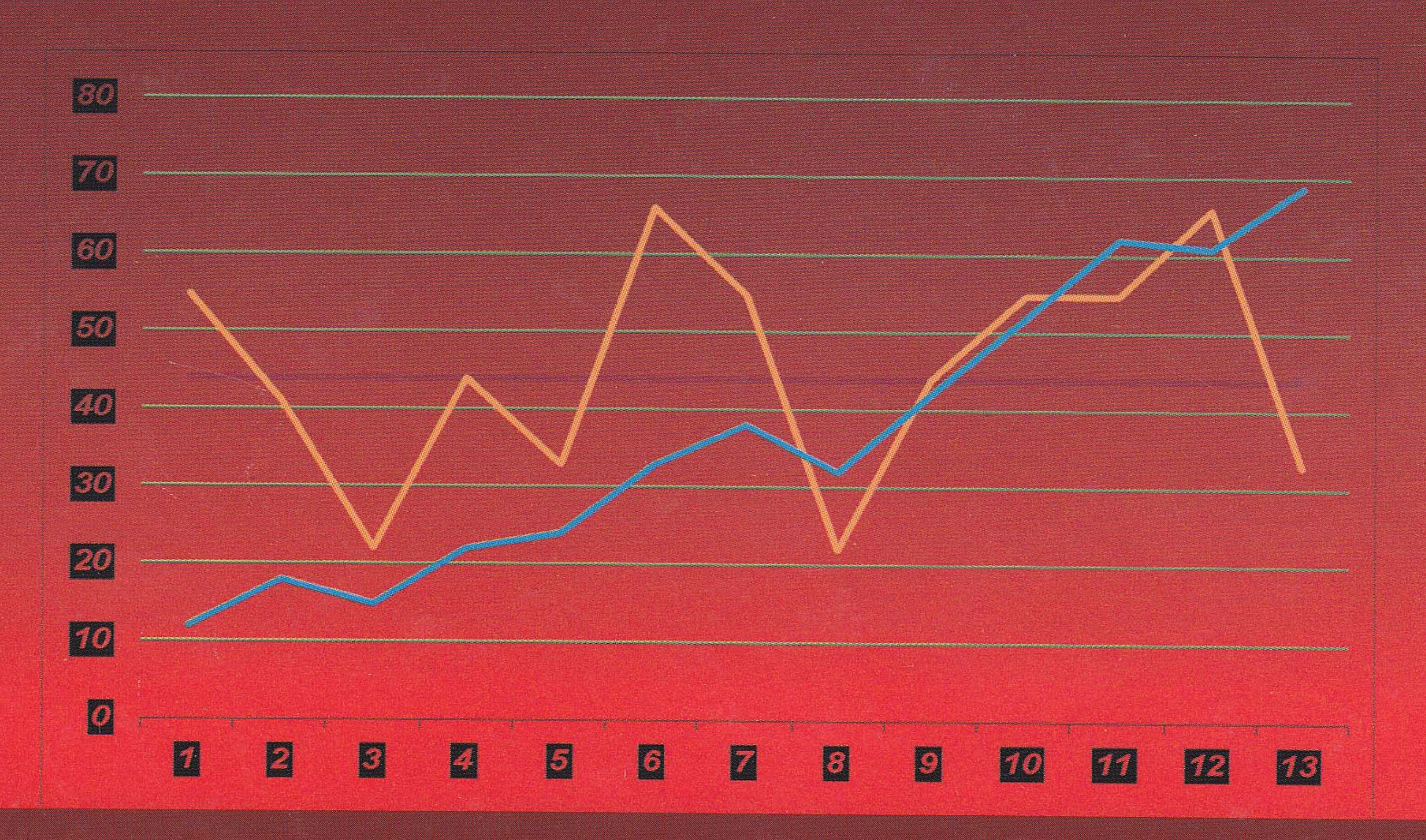


Applied Statistics

الأستاذ الدكتور
محمد عبد العال النعيمي
جامعة الشرق الأوسط
للدراسات العليا

الدكتور
حسن ياسين طعمة
أستاذ مشارك - جامعة فيلادلفيا الأهلية
محاضر غير متفرغ





2008
الطبعة الأولى

الاحصـــاء التطبيقي

Applied Statistics

تأليف

الأستاذ الدكتور
محمد عبد العال النعيمي
جامعة الشرق الأوسط
للدراسات العليا

الدكتور
حسن ياسين طعمة
أستاذ مشارك / جامعة فيلادلفيا
الأهلية
عضو هيئة تدريس غير متفرغ

دار وائل للنشر

الطبعة الأولى
2008

رقم الايداع لدى دائرة المكتبة الوطنية : (2007/10/3228)
النعيمي ، محمد عبد العال
الإحصاء التطبيقي - Applied Statistics / محمد عبد العال النعيمي، حسن ياسين طعمة. - عمان : دار وائل، 2007 .
(425) ص
ر.إ. : (2007/10/3228)
الواصفات: الإحصاء التجريبي، الإحصاء الرياضي/ الإحصاء
* تم إعداد بيانات الفهرسة والتصنيف الأولية من قبل دائرة المكتبة الوطنية
****

رقم التصنيف العشري / ديوي : 519.51
(ردمك) ISBN 978-9957-11-740-5

* الإحصاء التطبيقي Applied Statistics
* الأستاذ الدكتور محمد عبد العال النعيمي - الدكتور حسن ياسين طعمة
* الطبعة الأولى 2008



دار وائل للنشر والتوزيع
* الأردن - عمان - شارع الجمعية العلمية الملكية - مبنى الجامعة الاردنية الاستثماري رقم (2) الطابق الثاني
هاتف : 00962-6-5338410 - فاكس : 00962-6-5331661 - ص. ب (1615 - الجبيهة)
* الأردن - عمان - وسط البلد - مجمع الفحيص التجاري- هاتف: 00962-6-4627627
www.darwael.com
E-Mail: Wael@Darwael.Com

بسم الله الرحمن الرحيم

{نَرَفعُ دَرَجاتٍ مَنْ نَشَاءُ وفَوقَ كُلِ
ذي عِلْمٍ عَليمُ}

صدق الله العظيم

سورة يوسف / الآية 76



الإهـــداء

إلى بلد الحضارات ... العراق الجريح
وفاءاً... وإكراماً.

المؤلفان

المحتويات
Contents

	الموضوع	الصفحة
	مقدمة	15-13
1	**الفصل الأول: مفاهيم أساسية ....**	43-17
	1.1: طرق العد	17
	2.1: مفكوك العدد	21
	3.1: التباديل	22
	4.1: التوافيق	26
	5.1: نظرية المجموعات	28
2	**الفصل الثاني: مقدمة في نظرية الاحتمالات ....**	76-45
	2-1: مفهوم نظرية الاحتمالات	45
	2-1-1: التعريف العام للاحتمال	45
	2-1-2: بعض المبادئ الاساسية لفهم وقياس الاحتمال	46
	2-1-3: قياس الاحتمال	47
	2-1-4: خواص (بديهيات) الاحتمال	49
	2-1-5: قوانين عامة في نظرية الاحتمالات	50
	2-1-6: نظريات مهمة في الاحتمالات	53
	2-2: الاحتمال الشرطي	59
	2-3: الحوادث المستقلة	60
	2-4: الاحتمال الكلي	63
	2-5: نظرية بييز	66
3	**الفصل الثالث: المتغيرات العشوائية ....**	106-77
	3-1: مقدمة	77

الصفحة	الموضوع	
77	3-2: المتغير العشوائي المنفصل	
78	3-2-1: التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل	
85	3-2-2: القيمة المتوقعة والتباين للمتغير العشوائي المنفصل....	
91	3-3: المتغير العشوائي المتصل	
92	3-3-1: التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتصل	
95	3-3-2: القيمة المتوقعة والتباين للمتغير العشوائي المتصل.....	
168-107	**الفصل الرابع: التوزيعات الاحتمالية ....**	**4**
107	4-1: مقدمة	
107	4-2: التوزيعات الاحتمالية المنفصلة	
108	4-2-1: توزيع برنوللي	
111	4-2-2: توزيع ذي الحدين	
118	4-2-3: توزيع بواسون	
123	4-2-4: العلاقة بين توزيع ذي الحدين وتوزيع بواسون	
125	4-2-5: التوزيع الهندسي	
128	4-2-6: التوزيع فوق الهندسي	
132	4-2-7: التوزيع المنتظم المنفصل	
135	4-3: التوزيعات الاحتمالية المتصلة	
135	4-3-1: التوزيع الطبيعي	
140	4-3-2: التوزيع الطبيعي المعياري	
143	4-3-3: حساب الاحتمالات للمتغيرات ذات التوزيع الطبيعي...	
147	4-3-4: التوزيع المنتظم	
152	4-3-5: توزيع گاما	
156	4-3-6: التوزيع الأسي	
159	4-3-7: توزيع بيتا	

الموضوع		الصفحة

5 **الفصل الخامس: الارتباط والانحدار الخطي البسيط 236-169**

5-1: مقدمة 169

5-2: الارتباط 169

5-3: الارتباط الخطي البسيط 171

5-4: إرتباط الرتب 192

5-5: إرتباط الصفات 200

5-6: الانحدار 208

5-7: الانحدار الخطي 209

5-7-1: الانحدار الخطي البسيط 210

5-7-2: تقدير معلمات نموذج الانحدار الخطي البسيط 210

5-7-3: مؤشرات إختبار جودة توفيق نموذج الانحدار البسيط.. 214

5-7-4: العلاقة بين معامل الانحدار ومعامل الارتباط 227

6 **الفصل السادس: تحليل التباين 273-237**

6-1: مقدمة 237

6-2: تحليل التباين باتجاه واحد 237

6-3: المقارنات المقترحة بعد اجراء تحليل التباين 243

6-3-1: مقارنة متوسطات المجموعات بمتوسط مجموعة المقارنة 244

6-3-2: المقارنات المتعددة بين المتوسطات 247

أولا: اختبار الفرق المعنوي الاصغر 247

ثانيا: اختبار الفرق المعنوي الصريح (اختبار توكي) 250

ثالثا: اختبار شيفيه 252

رابعا: اختبار دنكن 255

خامسا: اختبار نيومان – كول 258

6-4: تحليل التباين باتجاهين 261

	الموضوع	الصفحة
7	**الفصل السابع: الاختبارات اللامعلمية ....**	328-275
	7-1: مقدمة	275
	7-2: إختبار ولكوكسن لاشارة الرتب	276
	7-3: إختبار ولكوكسن لاشارة رتب الفرق المزدوج	288
	7-4: إختبار ولكوكسن لمجموع الرتب	293
	7-5: إختبار مان – وتني	298
	7-6: إختبار كروسكال – والز	303
	7-7: إختبار فريدمان	308
	7-8: إختبار معامل إرتباط الرتب لسبيرمان	313
	7-9: إختبار مربع كاي	319
8	**الفصل الثامن: السلاسل الزمنية ....**	385-329
	8-1: مقدمة	329
	8-2: مفهوم السلاسل الزمنية	329
	8-3: تحليل السلسلة الزمنية	330
	8-3-1: الاتجاه العام	331
	أولا: طريقة التمهيد باليد	333
	ثانيا: طريقة متوسطي نصفي السلسلة	335
	ثالثا: طريقة المتوسطات المتحركة	338
	رابعا: طريقة المربعات الصغرى	343
	8-3-2: استبعاد أثر الاتجاه العام من مشاهدات السلسلة الزمنية	348
	8-3-3: التغيرات الموسمية (الفصلية)	350
	أولا: طريقة النسبة إلى المتوسط المتحرك	352
	ثانيا: طريقة المتوسطات البسيطة	357
	ثالثا: طريقة النسبة إلى المتوسط العام	360

الموضوع	الصفحة
رابعا: طريقة النسبة إلى الاتجاه العام	365
8-3-4: التغيرات الدورية	373
8-3-5: التغيرات غير المنتظمة (العشوائية)	379
المصادر:	389-387
اولا: المصادر العربية	387
ثانيا: المصادر الاجنبية	388
الملاحق	425-391

المقدمـــة

الحمدُ لله رب العالمين والصلاة والسلام على أصدق المرسلين سيدنا محمد صلى الله عليه وعلى آله وصحبه ومن تبعهُ إلى يوم الدين، والحمد لله الذي هدانا لهذا وما كنا لنهتدي لولا أن هدانا الله، الحمدُ لله على نعمة الإسلام ونعمُ من الله لا نحصيها.

بعد التوكل على الله جل وعلا شأنه، شرعنا بتأليف كتاب "الاحصاء التطبيقي"، والذي توخينا في تأليفه الدقة العلمية ووضوح الأسلوب، انطلاقاً من أهمية هذا الموضوع، وكذلك شعورنا بحاجة المكتبة العربية والجامعية إلى المزيد من المؤلفات في هذا المجال.

إن علم الاحصاء يُعد أحد الأساليب العلمية الشائعة الاستخدام الذي يستعمل كوسيلة فعالة لتحليل المشكلات ومعالجتها في الحياة العملية بشكل موضوعي، ويُعد ايضاً اداة لخدمة متخذي القرار والعلماء في مختلف مجالات المعرفة عن طريق تزويدهم بالمؤشرات التحليلية التي تساعدهم على إتخاذ القرارات الرشيدة بشأن المشكلات قيد الدراسة. وعلم الاحصاء كبقية العلوم الأخرى، قد شهد تطوراً سريعاً خلال القرنين التاسع عشر والعشرين، مقترناً بتطور نظرية الاحتمالات (Probability Theory)، فالعالم الانكليزي Francis Galton (1822-1921) كان أول من كتب في موضوع الانحدار (Regression) ، وكان رائداً في مجال استخدام هذا الموضوع في الحقول البايولوجية، في حين كان العالم الانكليزي Karl Pearson (1857-1936) أحد عباقرة علم الاحصاء الذي اكتشف نظرية تحليل الارتباط (Correlation Analysis Theory) ، أما العالم الاحصائي Gosset (1908) فقد استطاع على صياغة وبناء إختبار (t) الخاص بالعينات الصغيرة ($n < 30$) ، في حين كان العالم الاحصائي Fisher (1890-1962) يُعد رائداً في دراسة موضوع إختبار الفروق بين متوسطات المجموعات باستخدام اسلوب تحليل التباين (Analysis of Variance) .

وبناءاً على ما تقدم، فقد روعي في تقديم المادة العلمية لهذا المؤلف باسلوب مبسط وواضح ولغةً سليمة، ومن ثم وضع المعادلات وصياغتها بشكل رياضي دقيق

مقترنة بامثلة محلولة ذات صلة بالحياة العملية، الهدف منها إكساب الطالب المهارات اللازمة التي تمكنه من استخدام المؤشرات والأساليب الاحصائية في تحليل البيانات الخاصة بالظواهر قيد الدراسة.

وقد جاءت المادة العلمية لهذا الكتاب في ثمانية فصول، تناول الفصل الأول منه، على بعض المفاهيم الأساسية المتعلقة بطرق العد ومفكوك العدد والتباديل والتوافيق ونظرية المجموعات، أما الفصل الثاني فقد خصص لدراسة نظرية الاحتمالات وبعض المبادئ الأساسية لفهم وقياس الاحتمال ودراسة الاحتمال الشرطي ونظرية بييز، وخصص الفصل الثالث لدراسة المتغيرات العشوائية بنوعيها المنفصلة (المتقطعة)، والمتصلة (المستمرة)، مع ايجاد القيمة المتوقعة والتباين لكل نوع من المتغيرات العشوائية، في حين خصص الفصل الرابع لدراسة التوزيعات الاحتمالية بنوعيها، التوزيعات الاحتمالية المنفصلة، ومنها (توزيع برنولي، وتوزيع ذي الحدين، وتوزيع بواسون، والتوزيع الهندسي، والتوزيع فوق الهندسي، والتوزيع المنتظم المنفصل)، والتوزيعات الاحتمالية المتصلة، ومنها (التوزيع الطبيعي، والتوزيع الطبيعي المعياري، والتوزيع المنتظم المتصل، وتوزيع كاما، والتوزيع الأسي، وتوزيع بيتا)، وخصص الفصل الخامس لدراسة الارتباط والانحدار الخطي البسيط، حيث تم التركيز على دراسة الارتباط الخطي البسيط، وارتباط الرتب، وارتباط الصفات، ودراسة الانحدار الخطي البسيط، وتقدير معلمات نموذج الانحدار الخطي البسيط، ودراسة مؤشرات اختبار جودة توفيق نموذج الانحدار، والعلاقة بين معامل الانحدار ومعامل الارتباط، أما الفصل السادس فقد خصص لدراسة أسلوب تحليل التباين باتجاه واحد وباتجاهين، ودراسة المقارنات المتعددة بين المتوسطات، ومنها (إختبار الفرق المعنوي الاصغر، واختبار الفرق المعنوي الصريح (اختبار توكي)، واختبار شيفيه، واختبار دنكن، واختبار نيومان- كول)، في حين خصص الفصل السابع لدراسة الاختبارات اللامعلمية، ومنها (إختبار ولكوكسن لاشارة الرتب، واختبار ولكوكسن لاشارة رتب الفرق المزدوج، وإختبار ولكوكسن لمجموع الرتب، واختبار مان – وتني، واختبار كروسكال- والز، واختبار فريدمان، واختبار معامل ارتباط الرتب لسبيرمان، واختبار مربع كاي)، واخيراً فقد

خصص الفصل الثامن لدراسة السلاسل الزمنية وتحليل مركباتها المتمثلة [بالتغيرات الاتجاهية (الاتجاه العام)، والتغيرات الموسمية (الفصلية)، والتغيرات الدورية، والتغيرات غير المنتظمة (العشوائية)] .

وفي الوقت الذي نضع هذا الجهد العلمي المتواضع بين أيدي زملائنا التدريسيين والمتخصصين وابنائنا الطلبة، فانه يحذونا الأمل في أن تساهم المادة العلمية لهذا الكتاب في إثراء الفكر الاحصائي واغنائه بقدر من المعرفة العلمية، ونستميح القارئ الكريم العذر سلفاً عن أي نقص ورد في هذا الكتاب، فالنقص من سمات البشر والكمال لله وحده، ونسأل الله وندعوه سبحانه وتعالى أن يتقبل هذا العمل خالصاً لوجهه الكريم.

والله ولي التوفيق

المؤلفان

الفصل الأول
مفاهيم أساسية

قبل الخوض في موضوع نظرية الاحتمالات (Probability Theory)، لا بد من تسليط الضوء على بعض المفاهيم الاساسية التي لها علاقة وثيقة بنظرية الاحتمال، نذكر منها ما يأتي:

1.1 : طرق العد: Methods of Counting

هي عبارة عن تحديد عدد عناصر فضاء العينة (Sample Space)، وعدد عناصر الحادثة (Event) دون الحاجة إلى كتابة فضاء العينة او كتابة الحادثة.

ويعرف فضاء العينة (S)، بأنه جميع حالات الظهور الممكنة [او جميع النتائج الممكنة] عند اجراء تجربة عشوائية معينة.

أما الحادثة (E)، فهي جزء من النتائج الممكنة في فضاء العينة (S).

وبصورة عامة، إن طرق العد تساعدنا كثيراً في ايجاد قيم الاحتمال (Probability) بسهولة، وعلى وجه التحديد في بعض الحالات التي يكون فيها عدد عناصر فضاء العينة (S) كبير جدا، مما يجعلها عرضة للخطأ اثناء عّدها وكتابتها.

مثال (1):

اكتب فضاء العينة (S) مع تحديد عدد عناصر الفضاء، لتجربة عشوائية:

1) رمي عملة معدنية متجانسة واحدة.
2) رمي عملتين معدنيتين متجانستين.
3) رمي ثلاث عملات متجانسة.
4) رمي زهرة نرد متجانسة واحدة.
5) رمي زهرتي نرد متجانستين.
6) رمي عملة معدنية وزهرة نرد معاً.

7) رمي عملتين وزهرة نرد.

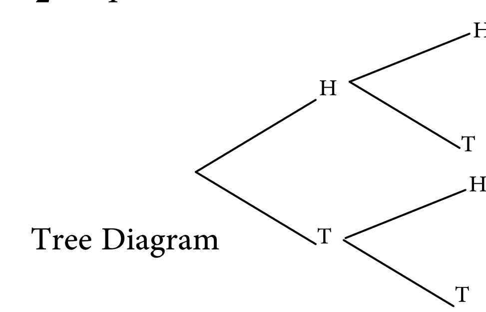
Solution:

(1) $S = \{ H , T \}$, H : Head صورة

$n(S) = 2^1 = 2$ T: Tail كتابة

(2) $S = \{ HH, HT, TH, TT\}$

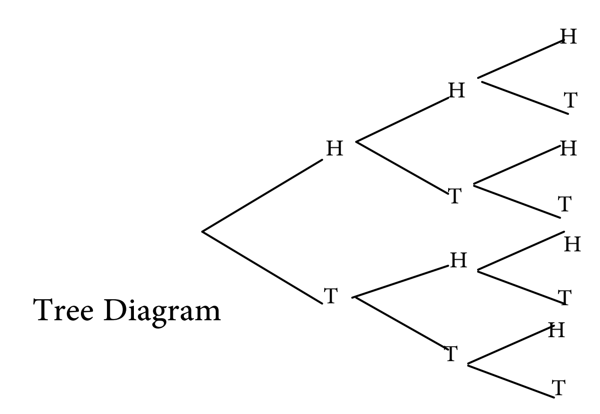
$n(S) = 2^2 = 4$



Tree Diagram

(3) $S = \{HHH, HHT, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$

$n(S) = 2^3 = 8$



Tree Diagram

(4) S = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }

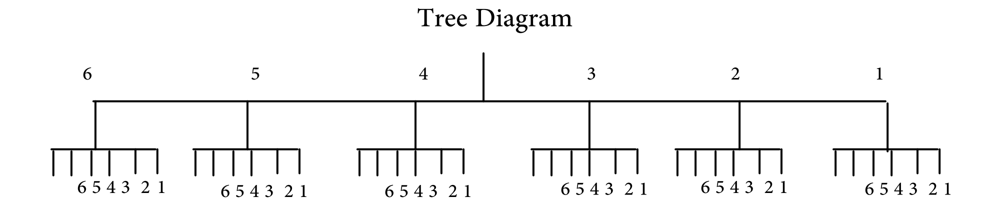
$n(S) = 6^1 = 6$

(5)

S = { (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)
(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6)
(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)
(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6)
(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)
(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) }

$n(S) = 6^2 = 36$

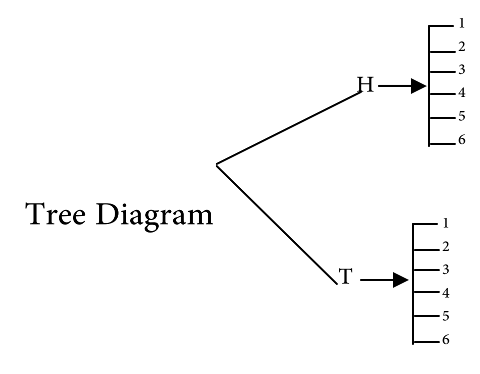
Tree Diagram



(6)

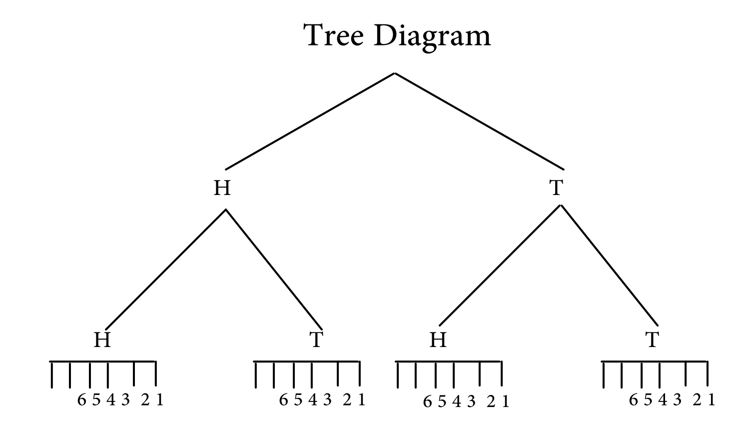
S = { (H,1), (H,2), (H,3), (H,4), (H, 5), (H, 6)
(T, 1), (T,2), (T, 3), (T,4), (T, 5) , (T, 6) }

$n(S) = 2^1 * 6^1 = 12$



$$S = \begin{Bmatrix} (H,H,1), (H, H, 2), \ldots, (H, H, 6) \\ (H,T,1), (H, T, 2), \ldots, (H, T, 6) \\ (T, H,1), (T, H, 2), \ldots, (T, H, 6) \\ (T, T,1), (T, T, 2), \ldots, (T, T, 6) \end{Bmatrix}$$

$$n(S) = 2^2 * 6^1 = 24$$



Note:

$n(S) = [\text{No. of faces}]^n$, n : تمثل عدد القطع

فعلى سبيل المثال (1) رمي زهرتي نرد ⟸ $\therefore\ n(S) = 6^2 = 36$

(2) رمي عملتين وزهرة نرد ⟸ $\therefore\ n(S) = 2^2 * 6^1 = 24$

مثال (2):

عند رمي ثلاث عملات معدنية متجانسة، في تجربة عشوائية:

المطلوب:

اكتب الحوادث التالية، مع تحديد عناصر كل منها:

(1) E1: حدث عدم ظهور صورة.

(2) E2: حدث ظهور صورتان وكتابة.

(3) E3: حدث ظهور صورتان على الأقل.

(4) E4: حدث ظهور صورة واحدة على الأكثر.

Solution:

S = { HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT }.

$n(S) = 2^3$

$= 8$

(1) E_1 = { TTT }

$n(E_1) = 1$

(2) E_2 = { HHT, HTH , THH }

$n(E_2) = 3$

(3) E_3 = { HHH , HHT , HTH , THH }

$n(E_3) = 4$

(4) E_4 = { HTT , THT , TTH , TTT }

$n(E_4) = 4$

1. 2 : مفكوك العدد : The Factorial

يعرف مفكوك (مضروب) أي عدد صحيح موجب، بأنه حاصل ضرب الرقم (1) في الرقم (2) في الرقم (3)، ....، وهكذا وصولا إلى العدد نفسه.

فعلى سبيل المثال، إن مفكوك العدد (n)، يكتب على الوجه الآتي:

$$n! = 1 * 2 * 3 * .... * (n -1) * n$$

أو يكتب على الصورة الآتية:

$$n! = n * (n-1) * (n -2) *...* 2 * 1$$

مثال (3) :

جد مفكوك الاعداد [3 ، 5 ، 6] .

Solution:

(1) $3! = 1 * 2 * 3 = 6$

(2) $5! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 = 120$

(3) $6! = 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 720$

3 .1 : التباديل: The Permutations

هي عبارة عن اي ترتيب متسلسل لمجموعة من الاشياء مع مراعاة التكرار، وتكون عملية التباديل، على **ثلاث حالات**، هي:

(أ) اذا كان لدينا (n) من الأشياء، تم اختيارها جميعا، فإن عدد طرق ترتيبها، يكتب على الوجه الآتي:

$$\text{No. of ways} = {}^{n}P_{n} = n! = n(n-1)(n-2) \ldots 2 * 1$$

الصيغة السابقة، يمكن كتابتها، بدلالة المفكوك ووفقاً للعلاقة الآتية:

$${}^{n}P_{n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{o!} = n! \qquad , \qquad o! = 1$$

مثال (4) :

كم عدد الطرق الممكنة في ترتيب الحروف [C , B, A] ؟

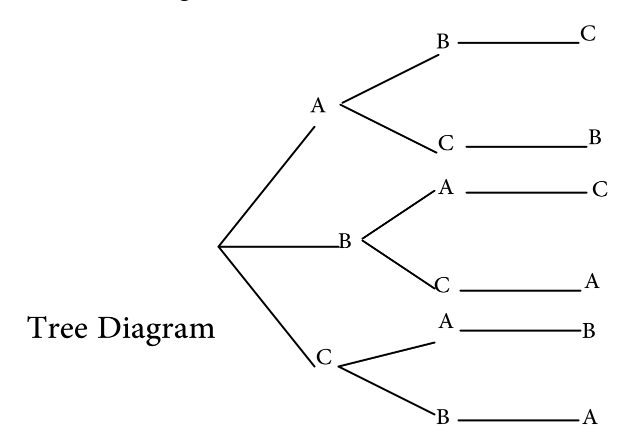
Solution:

يمكن ايجاد عدد الطرق الممكنة في ترتيب الحروف، بواحدة من الطرق الآتية:

أما (1) $\text{No. of ways} = n! = 3! = 6$

أو (2) ${}^{3}P_{3} = \frac{3!}{(3-3)!} = \frac{3!}{o!} = 3! = 6$

أو (3) Tree Diagram:



اذن عدد الطرق الممكنة لترتيب الحروف الثلاثة، هي (6)، وعلى النحو الآتي:

[ABC , ACB , BAC , BCA , CAB , CBA].

(ب) أما اذا كان لدينا (n) من الاشياء، اختير جزء منها وليكن (r) ، فإن عدد طرق ترتيبها، يكتب بالصورة الآتية:

No. of ways = $n(n-1) \ldots (n-r+1)$

الصيغة اعلاه، يمكن كتابتها بدلالة المفكوك ووفقا للعلاقة الآتية:

$$^{n}P_{r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال (5):

تم سحب بطاقتين (2) بشكل عشوائي من اصل (20) بطاقة في عملية قرعة، كم هو عدد النقاط في فضاء العينة (S) ؟

Solution:

يمكن الحصول على عدد النقاط في فضاء العينة (S)، بطريقتين هما:

أما (1) No. of points $= n(n-1)(n-2) \ldots (n-r+1)$

$= 20 (19)$

$= 380$ points

أو (2)

$$^{n}P_{r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$^{20}P_{2} = \frac{20!}{18!}$$

$$= \frac{20*19*18!}{18!}$$

$= 20(19)$

$= 380$ points.

مثال (6) :

كم عدد الطرق الممكنة في ترتيب حرفين (2) من الحروف [C, B, A]؟

Solution:

يمكن الحصول على عدد طرق ترتيب حرفين (2) من الحروف الثلاث، باستخدام احدى الطرق الآتية:

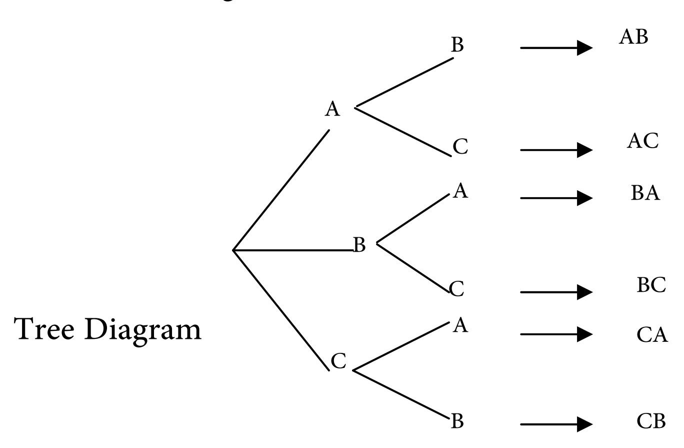
أما (1) No. of Ways $= n(n-1)(n-2) \ldots (n-r+1)$

$= 3(2)$

$= 6$

أو (2) $${}^{3}P_{2} = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{3!}{1!} = \frac{3(2)(1)}{1} = 6$$

أو (3) Tree Diagram :



اذن عدد التراتيب الممكنة هي (6)، وكالاتي:

$\therefore$ [AB , AC , BA , BC , CA , CB].

(ج) اذا كان لدينا (n) من الأشياء، بحيث ان (n_1) تمثل النوع الأول، (n_2) تمثل النوع الثاني، ....، (n_k) تمثل النوع ذو المرتبة (k)، فإن عدد طرق ترتيبها، هي:

$$\text{No. of arrangements} = \frac{n!}{n_1!*n_2!*....*n_k!}$$

مثال (7):

إذا كان لديك (3) مصابيح حمراء، و (4) زرقاء، و (3) صفراء.

كم هي عدد الطرق الممكنة في ترتيب الانواع الثلاثة من المصابيح في نشره ضوئية؟

Solution:

$$n = n_1 + n_2 + n_3$$
$$= 3 + 4 + 3$$
$$= 10$$

$$\therefore \text{ No. of ways } = \frac{n!}{n_1!*n_2!*n_3!}$$

$$= \frac{10!}{3!*4!*3!}$$

$$= \frac{10*9*8*7*6*5*4!}{3*2*1*4!*3*2*1}$$

$$= 4200 \text{ way}$$

مثال (8):

إثبت إن عدد طرق ترتيب (n) من الأشياء، اختير جزء منها وليكن (r)، هو:

$$\text{No. of ways } \left({}^{n}P_{r}\right) = n\,(n\text{-}1)\; \ldots\ldots\; (n - r + 1)$$

Proof:

$$\because {}^{n}P_{r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$= \frac{n(n-1)......(n-r+1)(n-r)!}{(n-r)!}$$

$$\therefore {}^{n}P_{r} = n(n\text{-}1) \;.......(n\text{-}r\text{+}1)$$

4 .1 : التوافيق : The Combinations

هي عدد الطرق الممكنة التي يمكن بها اختيار (r) من الأشياء من بين (n)، دون مراعاة التكرار، ويرمز لها بالرمز $\left(C_r^n\right)$ ، وتكتب بالعلاقة الآتية:

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال(9):

جد قيمة كل من:

(1) C_2^4

(2) C_4^6

Solution:

$$(1)\quad C_2^4 = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$
$$= \frac{4!}{2!*2!}$$
$$= \frac{4*3*2!}{2*1*2!}$$
$$= 6$$

$$(2)\quad C_4^6 = \frac{6!}{4!*2!}$$
$$= \frac{6*5*4!}{4!*2*1}$$
$$= 15$$

مثال (10) :

يراد تشكيل لجنة طلابية مكونة من (4) طلاب بواقع [(2) طالبين من قسم إدارة الاعمال، و (2) من قسم المحاسبة]، بحيث يتم اختيارهم من بين (6) طلاب من إدارة الاعمال، (5) طلاب من المحاسبة، كم هي عدد الطرق التي يتم بموجبها تشكيل اللجنة؟

Solution:

(a) No. of ways (Adminis.) $\Longrightarrow$ $C_2^6 = \dfrac{6!}{2!*4!}$

$$= \frac{6*5*4!}{2*1*4!}$$

$$= 15$$

(b) No. of ways (Accounting) $\Longrightarrow$ $C_2^5 = \dfrac{5!}{2!*3!}$

$$= \frac{5*4*3!}{2*1*3!}$$

$$= 10$$

$$\therefore \text{ The no. of ways } = C_2^6 * C_2^5$$

$$= 15 * 10$$

$$= 150 \text{ way.}$$

مثال (11):

إثبت صحة العلاقة الآتية:

$${}^{n}P_r = r!*C_r^n$$

Proof:

$$\because C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

نضرب طرفي العلاقة اعلاه بالمقدار (r!)، نحصل على:

$$\therefore r!*C_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

بما إن المقدار $\left[\dfrac{n!}{(n-r)!}\right]$ هو عبارة عن $\left({}^{n}P_r\right)$، عليه فإن العلاقة اعلاه، تكتب على النحو الآتي:

$${}^{n}P_r = r!*C_r^n$$

الصيغة اعلاه، تمثل العلاقة بين التباديل والتوافيق .

5 .1 : نظرية المجموعات : Set theory

أولا: المجموعة:

عبارة عن تجمع أشياء أو (عناصر) ذات صفات مشتركة ومميزة، وعادة يرمز لها بحروف هجائية كبيرة مثل [A، B ، C ، .....] ، أما عناصر المجموعة فيرمز لها بحروف هجائية صغيرة مثل [a ، b ، c ، ....]

فإذا كان العنصر (a) مثلا ينتمي إلى المجموعة (A)، ففي هذه الحالة يكتب بالصورة ($a \in A$) ، وتقرأ [العنصر (a) ينتمي إلى المجموعة (A)].

أما إذا كان العنصر (a) لا ينتمي إلى المجموعة (A) ففي هذه الحالة يكتب بالصورة ($a \notin A$) ، وتقرأ [العنصر (a) لا ينتمي إلى المجموعة (A)].

وتكون عناصر المجموعة عادة إما [ارقام، حروف، صفات، اسماء، أو أية أشياء اخرى محددة].

طرق كتابة المجموعات:

هناك عدة طرق لكتابة المجموعات، نذكر منها ما يأتي:

(أ) طريقة جدولة العناصر:

تتلخص هذه الطريقة في كتابة اسم المجموعة ولتكن (A) مثلا، ثم نكتب (=)، ثم نفتح قوسين من النوع {   } ، ومن ثم كتابة عناصر المجموعة داخل القوسين، على ان يفصل كل عنصر من العناصر الأخرى بعلامة (،) .

مثال (12):

اكتب عناصر المجموعة (B) ، بحيث ان عناصرها تمثل [الاعداد الزوجية التي تبدأ بالعدد (4) واقل من العدد (16)]، مع بيان عدد عناصرها.

Solution:

$\therefore B = \{ 4 , 6 , 8 , 10 , 12 , 14 \}$

$n(B) = 6$

(ب) الطريقة الخاصة المميزة للعناصر:

تتلخص هذه الطريقة في كتابة المجموعة، كالآتي:

$$A = \{ X: X (A)\}$$

إذ إن:

X(A) : تمثل الصفة المميزة للعناصر (X).

مثال (13) :

Let $A = \{ X : X \geq 0 \}$

$\therefore\ A = \{ 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , ...\}$

(ج) طريقة اشكال فن (Venn):

اشكال فن: عبارة عن رسوم هندسية تحوي بداخلها نقاط تمثل عناصر المجموعة. وتكون هذه الاشكال على هيئة [مربعات، مثلثات، مستطيلات، او دوائر]، وسنستخدم الاشكال الدائرية كونها اكثر شيوعا واستخداما.

مثال (14) :

عبر عن المجموعات التالية: بأشكال فن (Venn):

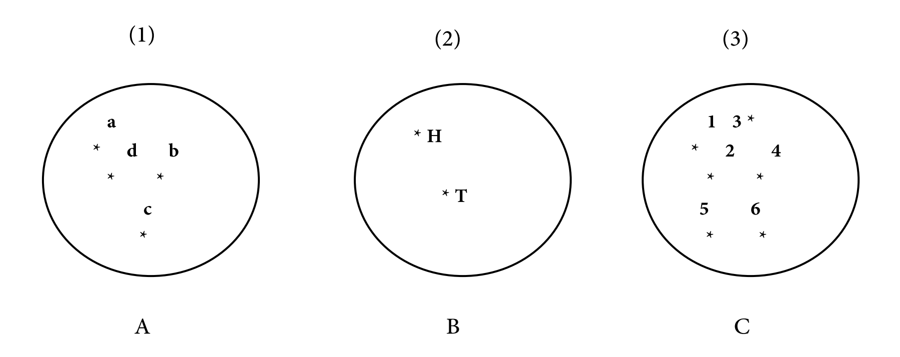
(1) $A = \{ a , b , c , d \}$, $n (A) = 4$

(2) $B = \{ H , T \}$, $n (B) = 2$

(3) $C = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 \}$, $n (C) = 6$

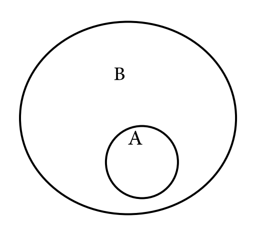
Solution:

يمكن تمثيل المجموعات الثلاث اعلاه، بأشكال فن (Venn)، كالاتي:



ثانيا: المجموعة الجزئية : The Subset

(أ) يقال على المجموعة (A) مجموعة جزئية من المجموعة (B) ويرمز لها بالرمز ($A \subset B$)، اذا وقعت جميع عناصر المجموعة (A) ضمن عناصر المجموعة (B).



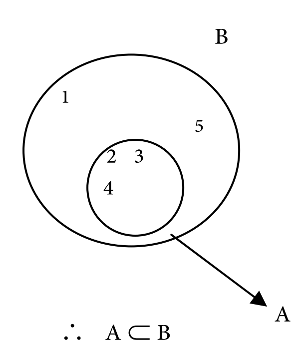
$A \subset B$

مثال (15):

لديك المجموعتين الآتيين:

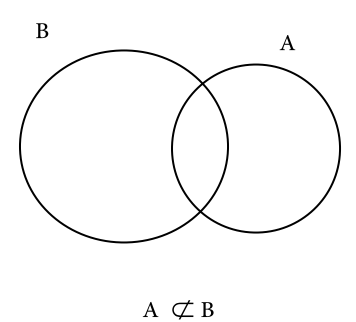
$A = \{ 2 , 3 , 4 \}$

$B = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 \}$



$\therefore \quad A \subset B$

(ب) أما إذا كانت المجموعة (B) لا تحتوي على جميع عناصر المجموعة (A) ، ففي هذه الحالة يقال أن (A) ليست مجموعة جزئية من (B)، ويرمز لها بالرمز ($A \not\subset B$) .



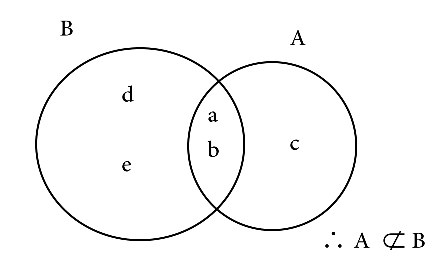
$A \not\subset B$

مثال (16):

لديك المجموعتين الآتيتين:

$A = \{ a , b , c \}$

$B = \{ a , b , d , e \}$



$\therefore A \not\subset B$

مثال (17):

حدد المجموعة الجزئية، للمجاميع الآتية:

$A = \{ 1 ,4 \}$

$B = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 \}$

$D = \{ 4 , 5 , 6 , 7\}$

Solution:

(1) $A \subset B$ [لان جميع عناصر المجموعة(A) موجودة في المجموعة (B)]

(2) $A \not\subset D$ [لان العنصر(1) في المجموعة(A) غير موجود في المجموعة (D)]

(3) $D \not\subset B$ [لان العنصر (7) في المجموعة(D) غير موجود في المجموعة (B)]

ثالثا: المجموعة الشاملة (فضاء العينة): The Sample Space (S)

لاي مجموعة من المجموعات، لها مجموعة اكبر واشمل منها، وتسمى هذه المجموعة بـ [المجموعة الشاملة] أو تسمى بـ [فضاء العينة]، ويرمز لها بالرمز (S).

ويعرف **فضاء العينة (S) :**

هو المجموعة الشاملة التي تحتوي على جميع النتائج الممكنة للتجربة العشوائية.

مثال (18):

عند رمي زهرة النرد في تجربة عشوائية، فإن المجموعة الشاملة (S) هي:

$S = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 \}$

فإن المجموعات التالية، هي مجموعات جزئية من المجموعة الشاملة (S)، أي إن:

$A = \{ 2, 4 , 6 \}$, $A \subset S$

$B = \{ 1, 3 , 5 \}$, $B \subset S$

$D = \{ 3 \}$, $D \subset S$

مثال (19):

عند رمي قطعة نقود مرتين متتاليتين في تجربة عشوائية

المطلوب:

1- صف فضاء العينة (S)، وعدد عناصره.
2- حدد المجموعات (الحوادث) التالية، وعدد عناصر كل مجموعة:
   أ- {ظهور على الاقل صورة}
   ب- { ظهور كتابة واحدة}
   ج- { ظهور صورة مرتين}

Solution:

(1) S = { HH, HT, TH, TT}.

$\therefore$ n (S) = 4

(2) (a) A = { HT , TH , HH} , n (A) = 3

(b) B = { HT , TH} , n (B) = 2

(c) C = { HH} , n (C) = 1

مثال (20):

عند القاء حجري زهرة النرد مرة واحدة في تجربة عشوائية .

المطلوب: جد ما يأتي:

1- كتابة فضاء العينة (S)، وعدد عناصره.

2- المجموعات (الحوادث) التالية، وعدد عناصر كل مجموعة:

أ – { ظهور رقمين متساويين }.

ب– { مجموع الرقمين اقل من (3) }.

ج- { مجموع الرقمين يساوي (8) }.

Solution:

(1)

6	5	4	3	2	1	الحجر (1) / الحجر (2)
(6،1)	(5،1)	(4،1)	(3،1)	(2،1)	(1،1)	1
(6،2)	(5،2)	(4،2)	(3،2)	(2،2)	(1،2)	2
(6،3)	(5،3)	(4،3)	(3،3)	(2،3)	(1،3)	3
(6،4)	(5،4)	(4,4)	(3،4)	(2،4)	(4،1)	4
(6،5)	(5،5)	(4،5)	(3،5)	(2،5)	(1،5)	5
(6،6)	(5،6)	(4،6)	(3،6)	(2،6)	(1،6)	6

$\therefore$ S = { (1, 1) , (1, 2) , …., (6, 6)} , n (S) = 36

(2) a – A = {(1, 1), (2,2), (3, 3), (4, 4) , (5, 5), (6, 6) } , n (A) = 6

b – B = { (1, 1) } , n (B) = 1

c - C = { (6, 2), (5, 3) , (4, 4), (3 , 5) , (2, 6) } , n (C) = 5

رابعا: المجموعة الخالية: The Empty Set (ϕ)

وهي المجموعة التي لا تحتوي على اي عنصر، ويرمز لها بالرمز (ϕ)، وتكتب بالصورة الآتية:

$$\phi = \{ \quad \}$$

مثال ذلك:

(1) مجموعة الطلبة الذين تقل اعمارهم عن (10) سنوات في جامعة فيلادلفيا.

(2) مجموعة التدريسيين الذين تزيد اعمارهم عن (150) سنة في جامعة جرش.

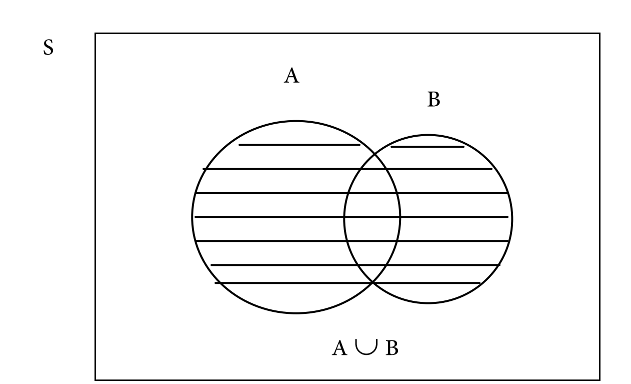
خامسا: اتحاد المجموعات: The Union of sets

يُعرف اتحاد المجموعتين (A ، B) مثلا بالمجموعة (C) ، اذ ان المجموعة (C)، عبارة عن مجموعة العناصر الموجودة في كل من (A) أو (B) أو كليهما، ويرمز لها بالآتي:

$$C = A \cup B$$

(وتقرأ A اتحاد B)

وتمثل بيانيا بشكل فن (Venn) كالآتي:



مثال (21) : اذا كانت لديك المجموعات الآتية:

$A = \{2 , 3\}$

$B = \{ 1 ,2 ,4, 6 \}$

$C = \{ 7 , 8 \}$

المطلوب: جد ما يأتي، مع تحديد عدد عناصر كل منها:

(1) $A \cup B$, $n(A \cup B)$

(2) $A \cup C$, $n(A \cup C)$

(3) $B \cup C$, $n(B \cup C)$

Solution:

(1) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$, $n(A \cup B) = 5$

(2) $A \cup C = \{2, 3, 7, 8\}$, $n(A \cup C) = 4$

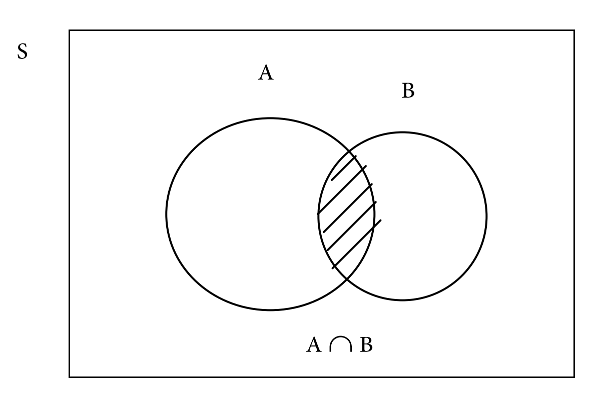
(3) $B \cup C = \{1, 2, 4, 6, 7, 8\}$, $n(B \cup C) = 6$

سادسا: تقاطع المجموعات: The Intersection of sets

يعرف تقاطع المجموعتين (B, A) مثلا بالمجموعة (D)، اذ ان المجموعة (D) عبارة عن مجموعة العناصر الموجودة في كل من (A) و (B) معا، ويرمز لها بالآتي:

$$D = A \cap B$$ (وتقرأ A تقاطع B)

وتمثل بيانيا بشكل فن (Venn) ، كالاتي:



وفي حالة عدم وجود عناصر مشتركة بين المجموعتين (A) و (B)، فيقال في هذه الحالة بأن المجموعتين (A) و (B) متنافيتان، أي أن [$A \cap B = \phi$]

مثال (22): لديك المجموعات الآتية:

$A = \{ 2, 3 \}$
$B = \{ 1, 2, 4, 6 \}$
$C = \{ 7 ,8 \}$

المطلوب: جد ما يأتي:

(1) $A \cap B \quad , \; n(A \cap B)$

(2) $A \cap C \quad , \; n(A \cap C)$

(3) $B \cap C \quad , \; n(B \cap C)$

Solution:

(1) $\therefore \; A \cap B = \{2\} \qquad , \; n(A \cap B) = 1$

(2) $A \cap C = \phi \qquad , \; n(A \cap C) = \text{Zero}$

(3) $B \cap C = \phi \qquad , \; n(B \cap C) = \text{Zero}$

مثال (23): لديك المجموعات الآتية:

$A = \{ X \mid 3 < X \leq 5 \}$
$B = \{ X \mid X \geq 3 \}$
$C = \{ X \mid X > 4 \}$

المطلوب: جد ما يأتي:

(1) $A \cup B \quad , \; A \cup C \quad , \; B \cup C \; , \; A \cup B \cup C.$

(2) $A \cap B \quad , \; A \cap C \quad , \; B \cap C \; , \; A \cap B \cap C.$

Solution:

نقوم أولا بكتابة عناصر المجموعات (A، B ، C) على النحو الآتي:

$A = \{ 4 ,5 \}$
$B = \{ 3 , 4 , 5 , \ldots\ldots \}$
$C = \{ 5, 6, 7, \ldots\ldots\ldots \}$

(1) $\therefore \; A \cup B = \{ 3 , 4, 5 ,\ldots\ldots \}$

$= \{ X \mid X \geq 3 \}$

$A \cup C = \{ 4, 5, 6, 7, \ldots\ldots \}$

$= \{ X \mid X \geq 4 \}$

$B \cup C = \{ 3, 4, 5, 6, 7, \ldots \}$

$= \{ X | X \geq 3 \}$

$A \cup B \cup C = \{ 3, 4, 5, 6, 7, \ldots \}$

$= \{ X | X \geq 3 \}$

(2) $\therefore A \cap B = \{ 4 , 5 \}$

$= \{ X | 4 \leq X \leq 5 \}$

$A \cap C = \{ 5 \}$

$= \{ X | X = 5 \}$

$B \cap C = \{5, 6, 7, \ldots\}$

$= \{ X | X \geq 5 \}$

$A \cap B \cap C = \{ 5 \}$

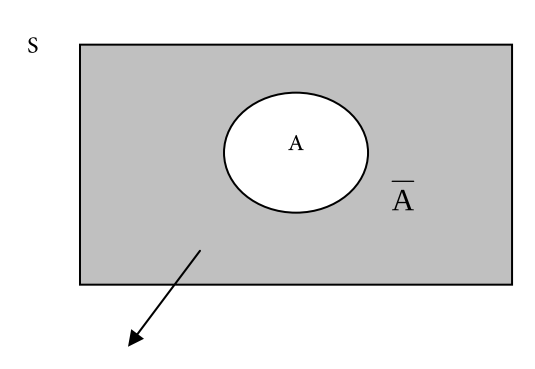
$= \{ X | X = 5 \}$

سابعا: متممة المجموعة: The Complement of set

عبارة من مجموعة العناصر الموجودة في المجموعة الشاملة (S) وغير موجودة في المجموعة (A)، ويرمز لها بالرمز (A^c) أو ($\overline{A}$)، أي ان:

$\overline{A} = S - A$ [$\overline{A}$ تقرأ متممة A]

وتمثل بيانيا بشكل فن (Venn) ، كالآتي:



$\overline{A} = S - A$

وفيما يلي بعض الخصائص المهمة حول متممة المجموعات:

(1) $\overline{A} \cup A = S$

(2) $\overline{A} \cap A = \phi$

(3) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

(4) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

يطلق على العلاقتين (3) و (4) بقانوني ديمورجن (Demorgen Laws)، وتعد هاتين العلاقتين مهمة جدا عند دراسة موضوع الاحتمالات.

مثال (24): لديك المجموعات الآتية:

$S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{ 2 , 4 , 6\}$

المطلوب: جد ما يأتي:

$\overline{A} \quad , \; n(\overline{A})$

Solution:

$\therefore \; \overline{A} = S - A$

$\therefore \; \overline{A} = \{ 1, 3, 5 \} \qquad , \; n(\overline{A}) = 3$

مثال (25): لديك المجموعات الآتية:

$S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$

$A = \{ 2, 4 , 6 \}$

$B = \{ 2 , 3 \}$

$C = \{ 4, 5 \}$

المطلوب:

جد ما يلي، مع تحديد عدد العناصر لكل منها:

(1) $\overline{A} \; , \; \overline{B} \; , \; \overline{C}$

(2) $A \cup B , A \cup C , B \cup C.$

(3) $A \cap B , A \cap C , B \cap C.$

(4) $\overline{A \cap B}, \overline{A} \cup \overline{B}$

(5) $\overline{A \cup B}, \overline{A} \cap \overline{B}$

Solution:

(1) $\therefore \overline{A} = S - A$

$= \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \} - \{ 2, 4, 6 \}$

$= \{ 1, 3 , 5 \} \qquad , n(\overline{A}) = 3$

$\overline{B} = \{ 1, 4, 5 , 6 \} \qquad , n(\overline{B}) = 4$

$\overline{C} = \{ 1, 2, 3, 6 \} \qquad , n(\overline{C}) = 4$

(2) $\therefore A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$, $n(A \cup B) = 4$

$A \cup C = \{2, 4, 5, 6\}$, $n(A \cup C) = 4$

$B \cup C = \{2, 3, 4, 5\}$, $n(B \cup C) = 4$

(3) $\therefore A \cap B = \{2\}$, $n(A \cap B) = 1$

$A \cap C = \{4\}$, $n(A \cap C) = 1$

$B \cap C = \phi$, $n(B \cap C) = \text{Zero}$

(4) $\because A \cap B = \{2\}$

$\therefore \overline{A \cap B} = \{1, 3, 4, 5, 6\}$, $n(\overline{A \cap B}) = 5$

$\because \overline{A} = \{1, 3, 5\}$

$\overline{B} = \{1, 4, 5, 6\}$

$\therefore \overline{A} \cup \overline{B} = \{1, 3, 4, 5, 6\}$, $n(\overline{A} \cup \overline{B}) = 5$

$\therefore \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(5) $\because A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$

$\therefore \overline{A \cup B} = \{1, 5\}$, $n(\overline{A \cup B}) = 2$

$\because \overline{A} = \{1, 3, 5\}$

$\overline{B} = \{1, 4, 5, 6\}$

$\therefore \overline{A} \cap \overline{B} = \{1, 5\}$, $n(\overline{A} \cap \overline{B}) = 2$

$\therefore \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

مثال (26)

لديك المجموعات الآتية:

S = { HH , HT , TH , TT }
A = { HH , HT }
B = { HT , TT }

المطلوب:

إثبت صحة العلاقتين الآتيتين:

(1) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

(2) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Solution:

(1) $\because\ A \cup B = \{ HH , HT , TT \}$

$\therefore\ \overline{A \cup B} = \{ TH \}$

$\because\ \overline{A} = \{ TH , TT \}$

$\overline{B} = \{ HH , TH \}$

$\therefore\ \overline{A} \cap \overline{B} = \{ TH \}$

$\therefore\ \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

(2) $\because\ A \cap B = \{ HT \}$

$\therefore\ \overline{A \cap B} = \{ HH , TH , TT \}$

$\therefore\ \overline{A} \cup \overline{B} = \{HH , TH , TT \}$

$\therefore\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

أسئلة عامة حول الفصل الأول

س1: اكتب الحوادث التالية، لرمي عملتين معدنيتين متجانستين في تجربة عشوائية:

(1) E_1 : حدث الحصول على صورتين.

(2) E_2 : حدث الحصول على صورة واحدة فقط.

(3) E_3 : حدث الحصول على صورة واحدة على الأقل.

(4) E_4 : حدث الحصول على صورة واحدة على الأكثر.

س2: اكتب الحوادث التالية، لرمي زهرة نرد واحدة متجانسة في تجربة عشوائية:

(1) E_1 : حدث ظهور عدد زوجي.

(2) E_2 : حدث ظهور عدد يقبل القسمة على (3).

(3) E_3 : حدث ظهور عدد اكبر ويساوي (4).

س3: اكتب الحوادث التالية، لرمي زهرتي نرد متجانستين في تجربة عشوائية:

(1) E_1 : حدث الحصول على مجموع العددين (11) على الوجهين.

(2) E_2 : حدث ظهور نفس العدد على وجهي الزهرتين.

(3) E_3 : حدث الحصول على مجموع العددين اكبر ويساوي (10) على الوجهين.

(4) E_4 : حدث يكون فيه حاصل ضرب العددين على الوجهين يساوي (12).

(5) E_5 : حدث يكون فيه العدد على الزهرة الاولى يساوي ضعف العدد على الزهرة الثانية.

س4: اكتب الحوادث التالية، لرمي عملة معدنية وزهرة نرد متجانستين معا في تجربة عشوائية:

(1) E_1 : حدث ظهور صورة مع عدد فردي.

(2) E_2 : حدث الحصول على صورة.
(3) E_3 : حدث الحصول على العدد (3).

س5: إثبت صحة العلاقات الآتية

(1) $^{4}P_{2} + C_{2}^{3} = C_{3}^{5} + 5$

(2) $C_{2}^{4} + 2*^{3}P_{2} = C_{2}^{5} + ^{2}P_{1} + 6$

(3) $\left(^{2}P_{2}\right)^{2} + 3*C_{2}^{3} = ^{2}P_{1}*C_{1}^{3} + ^{4}P_{1} + 3$

س6: قررت دائرة كهرباء صويلح تشكيل لجنة تتألف من (4) اربعة موظفين، يتم اختيارهم من بين (6) موظفين يعملون في قسم الادارة و (8) موظفين في قسم المالية.

المطلوب:

(1) كم عدد الطرق الممكنة لتشكيل اللجنة المذكورة في هذه الدائرة؟

(2) كم عدد الطرق الممكنة لتشكيل اللجنة، إذا طلبت الدائرة أن يكون من ضمن اللجنة:

أ – موظف إداري واحد و (3) موظفين من قسم المالية.

ب- (3) موظفين من قسم الادارة وموظف واحد من قسم المالية.

ج- (2) من موظفي قسم الادارة و (2) من موظفي قسم المالية.

س7: لدى عائلة (3) ثلاثة اطفال، فإذا كان الاهتمام منصبا على ترتيب اعمار الاطفال ونوعهم، بافتراض إن:

الحادثة (A) : تمثل الطفل الاكبر ذكر.

الحادثة (B) : تمثل الطفل الاصغر انثى.

المطلوب:

(1) اكتب فضاء العينة (S)، محددا عدد عناصره.

(2) صِف الحوادث التالية: محدداً عدد عناصر كل منها:

(a) $A , B , \overline{A} , \overline{B}$.

(b) $A \cup B , A \cap B$.

(c) $\overline{A \cup B} , \overline{A \cap B}$

(d) $\overline{A} \cup \overline{B} , \overline{A} \cap \overline{B}$.

س8: اكتب عناصر المجموعات الآتية:

(1) مجموعة الاعداد الصحيحة الزوجية المحصورة بين (1 – 20).

(2) مجموعة الاعداد الصحيحة الزوجية التي تقل عن (20) وتقبل القسمة على(4).

(3) مجموعة الاعداد الصحيحة الفردية التي تقل عن (20).

(4) مجموعة الاعداد الصحيحة الفردية التي تقل عن (20) وتقبل القسمة على (3).

س9: اكتب عناصر المجموعات الاتية:

(1) $A = \{ X \mid 9 \leq X \leq 14 \}$

(2) $B = \{ X \mid X = i^2 + 1 \quad , \ i = 1 , 2 , 3 , ... \}$

(3) $C = \{ X \mid X = 3i + 2 \quad , \ i = 1 , 3 , 5 , ...\}$

(4) $C = \{ X \mid X = (i + 1)^2 \ , \ i = 2 , 4 , 6 , ...\}$

س10: اكتب جميع المجموعات الجزئية (Subsets) للمجموعات الآتية:

(1) $A = \{ 10 , 50 \}$

(2) $B = \{ a , b , c \}$

(3) $C = \{ 1 , 2 , 3 , 4 \}$

(4) $D = \{ R, G , B , W \}$

س11: لديك المجموعات الآتية:

$S = \{ 2 , 6 , 8 , 10 , 12 , 14 , 15 \}$

$A = \{ 6 , 8 , 10 \}$

$B = \{ 2 , 10 , 14 \}$

$C = \{ 2 , 8 , 14 , 15 \}$

المطلوب:

جد ما يأتي:

(1) $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \cup B$, $A \cap B$

(2) $\overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cup B}$, $\overline{A \cap B}$

(3) $A \cap (B \cup C)$, $(A \cup B) \cap C$, $(A \cap B) \cap \overline{C}$.

(4) $(A \cap \overline{B} \cap \overline{C})$, $(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$, $(A \cup B \cup \overline{C})$.

س12: لديك المجموعات الآتية:

S = { HHH , HHT , HTH , HTT , THH , THT , TTH , TTT}.

A = { HHH , HHT , HTH, THH }

B = { HHT , THH , THT , TTT}

المطلوب:

جد ما يأتي:

(1) $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \cup B$, $A \cap B$.

(2) $\overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cup B}$, $\overline{A \cap B}$.

(3) $\overline{A} \cap (A \cup B)$, $\overline{B} \cup (A \cap B)$.

(4) Prove that: (a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

(b) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

الفصل الثاني
مقدمة في نظرية الاحتمالات
Introduction to Probabilities Theory

1-2 : نظرية الاحتمالات:

يُعد علم الاحتمالات من أهم علوم الاحصاء، لأن معظم النظريات والطرق الاحصائية بنيت على ذلك، من جانب آخر، إن علم الاحتمالات يؤثر على الحياة اليومية للافراد والمجتمعات، إذ إن كثير من القرارات الفردية والجماعية التي تُتخذ يوميا، تبنى على توقعات متعددة ومختلفة لحدوث بعض الحالات او عدم حدوثها.

كما ويُعد علم الاحتمالات من العلوم الاساسية والمهمة في دراسة الاستنتاج الاحصائي، إذ من خلاله يمكننا معرفة (قوة أو ضعف) التوقعات عن تطابق نتائج العينات (Samples) مع قيم المجتمع الاحصائي (Statistical Population) الذي اختيرت منه هذه العينات.

2-1-1: التعريف العام للاحتمال:

هو قيمة رقمية لتوقعات حدوث حدث معين، وتكون هذه القيمة، عبارة عن نسبة حدوث هذا الحدث، إذا تكرر نفس الموقف تحت نفس الظروف لعدد كبير من المرات، وتنحصر قيمة الاحتمال بالمجال [$1 \leq Pr \leq 0$] ، مثال ذلك:

1- رمي قطعة نقود لعدد من المرات، فإننا نتوقع ان تكون نسبة ظهور الصورة (H) هو $\left(\frac{1}{2}\right)$ من اجمالي عدد الرميات، وهكذا الحال بالنسبة لظهور الكتابة (T) .

2- رمي زهرة النرد ذات الستة اوجه، فإننا نتوقع ان تكون نسبة ظهور اي وجه من الاوجه السته هو $\left(\frac{1}{6}\right)$ من اجمالي عدد الرميات.

2-1-2: بعض المبادئ الاساسية لفهم وقياس الاحتمال:

أ- التجربة العشوائية: Random Experiment

هي كل تجربة لم تكن نتيجتها النهائية معروفة مسبقا بشكل مؤكد، مثال ذلك:

1- عند رمي قطعة نقود، فإن النتيجة لا بد ان تكون صورة (H) او كتابة (T)، ولكن لا يمكن الجزم بأن ما سيظهر هو صورة (H) او كتابة (T) في رمية معينة، بصورة مؤكدة.

2- عند رمي زهرة نرد، فإن النتيجة لا بد ان تكون احد الاوجه الستة [1، 2، 3، 4، 5، 6] ولكن لا يمكن الجزم بظهور وجه معين من الاوجه الستة بصورة مؤكدة.

ب- الحوادث الشاملة: Universal Events

يطلق على الحوادث [$A_n, ..., A_2, A_1$] بأنها حوادث شاملة عند اجراء تجربة عشوائية معينة، إذا كان لا بد من حدوث هذه الحوادث عند اجراء التجربة، مثال ذلك: عند رمي زهرة النرد، فإن الحصول على الاوجه الستة [1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6] تُعد حادثة شاملة.

ج- الحوادث المتنافية (المستبعِدة): Mutually Exclusive Events

إذا كان لدينا حادثتان (A) و (B) ، فإنهما يعرفان بأنهما متنافيتين إذا استحال حدوثهما معا، مثال ذلك [عند رمي قطعة نقود مرة واحدة، فإنه يستحيل ظهور الصورة (H) والكتابة (T) في آن واحد].

فإذا كانت الحادثة (A) تمثل ظهور الصورة (H)، والحادثة (B) تمثل ظهور الكتابة (T) ، فإن [$A \cap B = \phi$]، وبالتالي فإن:

$$\therefore\ P(A \cap B) = P(\phi)$$
$$= \text{Zero}$$

د- الحوادث المستقلة : **Independent Events**

إذا كان لدينا حادثتان (A) و (B) ، فإنه يقال على الحادثتين بأنهما مستقلتين، إذا كان حدوث احدهما لا يؤثر على حدوث الأخرى او عدم حدوثها، مثال ذلك:

1- عند القاء قطعتين من النقود، فإن ظهور الصورة (H) للقطعة الاولى، لا يؤثر على ظهور الصورة (H) او عدم ظهورها على القطعة الثانية.

2- عند اداء الاختبار للطلبة، فإن نجاح (محمد)، لا يؤثر على نجاح (علي) أو رسوبه.

وفيما يلي بعض الامثلة على الحوادث الآنفة الذكر:

(أ) $A \cup B$: تعني حدوث (A) او حدوث (B) او حدوث كليهما.
بمعنى آخر، حدوث احدهما على الأقل.

(ب) $A \cap B$: تعني حدوث الحدثين (A) و (B) معا.

(ج) $\overline{A}$: تعني عدم حدوث (A) .

3-1-2: قياس الاحتمال: **Measuring of the Probability**

يمكن قياس الاحتمال وفقاً لاحد التعريفين الآتيتين:

(أ) التعريف التقليدي للاحتمال:

إذا كان لدينا الحادثة (A)، وإن عدد عناصر هذه الحادثة هو n (A) ، وإن n(S) تمثل عدد الحالات الممكنة التي لها نفس الفرصة في الظهور، فإن احتمال حدوث الحادثة (A) بمعنى [نجاحها]، يرمز له بالرمز P(A) ، ويعطى بالصيغة الآتية:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

إن التعريف اعلاه، يصلح فقط عندما تكون نتائج التجربة العشوائية متماثلة بمعنى (لها نفس الفرصة بالظهور)، مثال ذلك:

1) جنس الانسان [ذكر (M) ، انثى (F)].
2) طبيعة الانتاج [جيد (G) ، معيب (D)].
3) قطعة النقود [صورة (H) ، كتابة (T)].
4) زهرة النرد [1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6].

مثال (1) :

ما هو إحتمال ظهور رقم زوجي، عند رمي زهرة نرد مرة واحدة؟

Solution:

$\because \quad S = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 \}.$

$n (S) = 6$

نفرض الحادثة (A) ، تمثل ظهور رقم زوجي، أي إن:

$A = \{ 2 , 4 , 6 \}$

$n(A) = 3$

$$\therefore \; P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$= \frac{3}{6}$$

$$= 0.5$$

ب- التعريف التجريبي للاحتمال:

عند إجراء تجربة عشوائية مرات متتالية عددها (n)، وكان عدد مرات ظهور حادثة معينة فيها ولتكن (E) هو (m) ، فإن احتمال حدوث الحادثة (E) ، يعطى بالصيغة الآتية:

$$P(E) = \lim_{n \to \infty} \frac{m}{n}$$

ويسمى المقدار $\left(\frac{m}{n}\right)$ بالتكرار النسبي أو الاحتمال التجريبي.

مثال (2) :

سُحبت ثلاث (3) ورقات بطريقة عشوائية، من ورق اللعب البالغ عددها (52) ورقة. ما هو احتمال الحصول على [(1) ملك و (2) آس] ؟

Solution:

عدد الطرق الممكنة لاختيار (1) ملك واحد، هو:

$$C_1^4 = \frac{4!}{1!3!}$$
$$= 4$$

عدد الطرق الممكنة لاختيار (2) آسين، هو:

$$C_2^4 = \frac{4!}{2!2!}$$
$$= 6$$

$\therefore$ عدد الطرق الممكنة لاختيار (1) ملك واحد و (2) آسين، هو:

$$m = C_1^4 * C_2^4$$
$$= 4(6)$$
$$= 24$$

عدد الطرق الممكنة لاختيار (3) ورقات من بين العدد الكلي للورق، هو:

$$n = C_3^{52}$$
$$= \frac{52!}{3!49!}$$
$$= 22100$$

عليه فإن احتمال الحصول على (1) ملك واحد و (2) آسين، هو:

$$\therefore P(E) = \frac{m}{n}$$
$$= \frac{24}{22100}$$
$$\approx 0.0011$$

4-1-2: خواص (بديهيات) الاحتمال:

(أ) إن قيمة الاحتمال لأي حادثة ولتكن (E)، تقع ضمن المجال (1، 0)، أي إن $[0 \leq P(E) \leq 1]$.

(ب)1- إن احتمال المجموعة الشاملة P (S) ، يساوي الواحد الصحيح، أي إن

. [$P(S) = 1$]

2- إن احتمال المجموعة الخالية ($P(\phi)$، يساوي (صفر)، أي إن

. [$P(\phi) = 0$]

(ج) إذا كان لدينا (A_2, A_1) حادثتين متنافيتين، أي إن [$A_1 \cap A_2 = \phi$] ، فإن احتمال حدوث (A_1) أو (A_2)، هو:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

(د) إذا كان لدينا (n) من الحوادث المتنافية ثنائيا هي [$A_n, ..., A_2, A_1$] أي إن [$A_i \cap A_j = \phi$] ، لكل قيم ($i \neq j$)، فإن:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

(هـ) إذا كان لدينا عدد لانهائي من الحوادث المتنافية ثنائيا [$A_1, A_2, A_3, ...$]، أي إن [$A_i \cap A_j = \phi$] ، لكل قيم ($i \neq j$) ، فإن :

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

2-1-5: قوانين عامة في نظرية الاحتمالات:

General Laws in Probability Theory

يتناول هذا الجزء بعض القوانين العامة ذات الصلة بنظرية الاحتمالات، نذكر منها ما يأتي:

أ- قانون الجمع : The Addition Law

(1) في حالة الحوادث غير المتنافية:

إذا كان لدينا (A_2 ، A_1) حادثتين غير متنافيتين، أي انهما ممكنة الحدوث في آن واحد، فإن احتمال حدوث (A_1) أو (A_2)، هو:

$$P(A_1 \text{ or } A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2).$$

مثال (3) :

إذا كان احتمال أن يكون الجو ملبدا بالغيوم هو (0.4)، واحتمال أن يكون الجو عاصفا هو (0.6)، واحتمال أن يكون الجو ملبداً بالغيوم وعاصفا في نفس الوقت هو (0.2).

المطلوب: ما هو احتمال أن يكون الجو ملبدا بالغيوم أو عاصفا؟

Solution:

نفرض إن الحادثة (A_1) تمثل بأن الجو ملبداً بالغيوم، عندئذ:

$$P(A_1) = 0.4$$

نفرض إن الحادثة (A_2) تمثل بأن الجو عاصفا، عندئذ:

$$P(A_2) = 0.6$$

نفرض إن الحادثة $(A_1 \cap A_2)$ تمثل بأن الجو ملبداً بالغيوم وعاصفا في آن واحد، عندئذ:

$$P(A_1 \cap A_2) = 0.2$$

وعليه فإن احتمال بأن يكون الجو ملبدأ بالغيوم أو عاصفا، هو:

$$\begin{aligned} P(A_1 \text{ or } A_2) &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) \\ &= 0.4 + 0.6 - 0.2 \\ &= 0.8 \end{aligned}$$

(2) في حالة الحوادث المتنافية :

إذا كان لدينا (A_2 , A_1) حادثتين متنافيتين، أي إن $(A_1 \cap A_2 = \phi)$ ، فإن احتمال حدوث (A_1) أو (A_2) ، هو:

$$P(A_1 \text{ or } A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

وبصورة عامة، إذا كان لدينا (n) من الحوادث المتنافية ثنائيا، هي على الترتيب $[A_1, A_2, ..., An]$ ، فإن احتمال حدوث (A_1) أو (A_2) أو ... (A_n) ، هو:

$$\begin{aligned} P(A_1 \text{ or } A_2 \text{ or } \dots \text{ or } A_n) &= P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) . \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \end{aligned}$$

مثال (4) :

عند رمي عملة معدنية متجانسة مرة واحدة في تجربة عشوائية.

ما هو احتمال ظهور الصورة (H) أو الكتابة (T) ؟

Solution:

نفرض الحادثة (A_1) تمثل ظهور الصورة (H) ، عندئذ:

$$P(A_1) = \frac{1}{2}$$

نفرض الحادثة (A_2) تمثل ظهور الكتابة (T)، عندئذ:

$$P(A_2) = \frac{1}{2}$$

∵ الحادثتين (A_1) و (A_2) متنافيتين، عليه فإن:

$$P(A_1 \cap A_2) = \text{Zero}$$

∴ احتمال ظهور الصورة (H) أو الكتابة (T) ، هو:

$$\begin{aligned} P(A_1 \text{ or } A_2) &= P(A_1) + P(A_2) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

ب- قانون الضرب: The Multiplication Law

إذا كان لدينا $(A_1 \text{ ، } A_2)$ حادثتين مستقلتين، فإن احتمال حدوثهما معا، هو:

$$P(A_1 \text{ and } A_2) = P(A_1) * P(A_2)$$

وبصورة عامة، لو كان لدينا (n) من الحوادث المستقلة بعضها عن البعض الآخر، وهي $[A_1, A_2, \ldots, A_n]$ ، فإن احتمال حدوثها معا، هو:

$$\begin{aligned} P(A_1 \text{ and } A_2 \text{ and } \ldots \text{ and } A_n) &= P(A_1) * P(A_2) * \ldots P(A_n) \\ &= \prod_{i=1}^{n} P(A_i) \end{aligned}$$

مثال (5) : عند رمي زهرتي نرد متجانستين في تجربة عشوائية.

ما هو احتمال ظهور الرقم (5) على وجه زهرة النرد الاولى والرقم (3) على وجه زهرة النرد الثانية؟

Solution:

نفرض الحادثة (A_1) تمثل ظهور الرقم (5) على وجه زهرة النرد الاولى، عندئذ:

$$P(A_1) = \frac{1}{6}$$

نفرض الحادثة (A_2) تمثل ظهور الرقم (3) على وجه زهرة النرد الثانية، عندئذ:

$$P(A_2) = \frac{1}{6}$$

$\therefore$ احتمال حدوث الحادثتين (A_1) و (A_2) معا، هو:

$$P(A_1 \text{ and } A_2) = P(A_1) * P(A_2)$$

$$= \frac{1}{6} * \frac{1}{6}$$

$$\approx 0.028$$

6-1-2: نظريات مهمة في الاحتمالات:

نظرية (1):

إن احتمال حدوث الحادثة الخالية (ϕ)، يساوي (صفر)، أي إن:

$$\boxed{P(\phi) = \text{Zero}}$$

Proof:

$$\because \quad S \cup \phi = S$$

$$\therefore P(S \cup \phi) = P(S)$$

$$\therefore P(S) + P(\phi) - P(S \cap \phi) = P(S)$$

$\because$ (ϕ) و (S) حادثتان متنافيتان، أي إن [$P(S \cap \phi) = 0$] ، عندئذ:

$$P(S) + P(\phi) = P(S)$$

$$\therefore P(\phi) = P(S) - P(S)$$

$$\boxed{\therefore \quad P(\phi) = \text{Zero}}$$

نظرية (2):

إن احتمال حدوث الحادثة (A) مضافا إليه احتمال حدوث مكملتها ($\overline{A}$) يساوي الواحد الصحيح (1)، أي ان:

$$\boxed{P(A) + P(\overline{A}) = 1}$$

Proof:

$\because \ A \cup \overline{A} = S$

$\therefore \ P(A \cup \overline{A}) = P(S) \quad , \ \because P(S) = 1$

$\therefore \ P(A) + P(\overline{A}) - P(A \cap \overline{A}) = 1$

بما إن الحادثتين (A) و ($\overline{A}$) متنافيتين، أي ان [$P(A \cap \overline{A}) = 0$] ، عليه فإن:

$P(A) + P(\overline{A}) - 0 = 1$

$$\therefore \quad P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

مثال (6) :

إذا كان احتمال نجاح (محمد) في مادة الاحصاء التطبيقي يساوي ($\frac{2}{3}$)، فما هو احتمال رسوبه في هذه المادة؟

Solution:

نفرض إن الحادثة (A) تمثل نجاح محمد

وإن الحادثة ($\overline{A}$) تمثل رسوب محمد، وإن:

$\because \ P(A) = \frac{2}{3}$ [يمثل احتمال نجاح محمد]

$\because \ P(A) + P(\overline{A}) = 1$

وعليه فإن احتمال رسوب محمد، هو:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

نظرية (3):

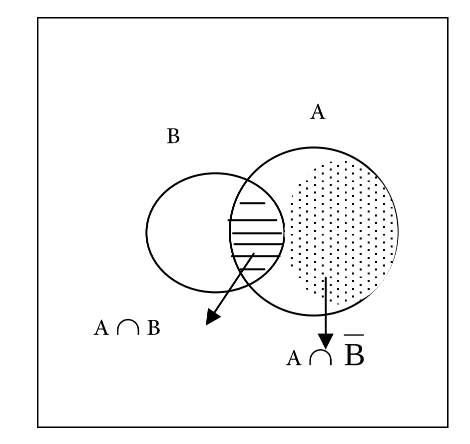
لأي حادثتين (A) و (B).

فإن احتمال حدوث (A) ، وعدم حدوث (B) يساوي احتمال حدوث (A) مطروحا منه احتمال حدوث (A و B) معا، أي أن:

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

Proof:

نفرض الحادثتين (A) و (B) ، وان المجموعة الشاملة هي (S)، ونقوم بتوضيح ذلك باشكال فن (Venn)، كالاتي:



$\Rightarrow$ او $A \cap \overline{B} = A - A \cap B$

الحادثتان $(A \cap \overline{B})$ و $(A \cap B)$ متنافيتان، كما هو موضح في الشكل اعلاه، أي ان:

$$(A \cap \overline{B}) \cap (A \cap B) = \phi$$

and : $(A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) = A$

وبأخذ الاحتمال للطرفين، نحصل على :

$$\therefore P(A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) = P(A)$$

$$\therefore P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B) - P(A \cap \overline{B}) \cap (A \cap B) = P(A)$$

بما إن $P[(A \cap \overline{B}) \cap (A \cap B)] = Zero$ ، عليه فان :

$$\therefore P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B) = P(A)$$

$$\therefore P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

مثال (7) :

إذا كان احتمال نجاح علاء في الامتحان النهائي بمادة علم الاحصاء هو ($\frac{1}{2}$)، واحتمال نجاح (علاء ومحمد) في نفس المادة هو ($\frac{1}{3}$).

المطلوب: جد احتمال نجاح علاء ورسوب محمد في المادة المذكورة

Solution:

A : {نجاح علاء} $\Rightarrow \quad \therefore P(A) = \frac{1}{2}$

B : {نجاح محمد}

$A \cap B$: {نجاح علاء ومحمد} $\Rightarrow \quad \therefore P(A \cap B) = \frac{1}{3}$

فيكون المطلوب هو ايجاد $P(A \cap \overline{B})$:

وبالاعتماد على نظرية (3)، نحصل على:

$$\therefore P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{3-2}{6}$$

$$= \frac{1}{6}$$

$$= 0.17$$

نظرية (4):

اذا كانت لدينا الحادثتين (A) و (B).

فإن احتمال حدوث أحداهما على الاقل يساوي احتمال حدوث (A) مضافا له احتمال حدوث (B) مطروحا منه احتمال حدوث (A و B) معا، اي ان:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Proof:

S

B　　A

$A \cap \overline{B}$

الحادثتان (B) و ($A \cap \overline{B}$) متنافيتان، كما هو موضح في شكل فن (Venn)، وبالتالي فإنهما يحققان الآتي:

$$B \cap (A \cap \overline{B}) = \phi$$

and : $A \cup B = B \cup (A \cap \overline{B})$

وبأخذ الاحتمال للطرفين، نحصل على:

$$\therefore P(A \cup B) = P[B \cup (A \cap \overline{B})]$$

$$= P(B) + P(A \cap \overline{B}) - P[B \cap (A \cap \overline{B})]$$

$$= P(B) + [P(A) - P(A \cap B)]$$

$$\therefore P(A \cup B) = P(B) + P(A) - P(A \cap B)$$

مثال (8):

اذا كان احتمال نجاح ليث في مادة الحاسوب هو ($\frac{1}{6}$)، واحتمال نجاح (ليث وحسنين) في نفس المادة هو ($\frac{1}{2}$)، واحتمال نجاح احدهما على الاقل هو ($\frac{1}{4}$).

المطلوب: جد احتمال نجاح حسنين في مادة الحاسوب.

Solution :

نفرض ان الحادثتين (A) و (B)، يمثلان الآتي:

A : {نجاح ليث} $\Rightarrow \therefore P(A) = \frac{1}{6}$

B : {نجاح حسنين}

$A \cap B$: {نجاح ليث وحسنين معا} $\Rightarrow \therefore P(A \cap B) = \frac{1}{2}$

$A \cup B$: {نجاح احدهما على الأقل} $\Rightarrow \therefore P(A \cup B) = \frac{1}{4}$

فيكون المطلوب ايجاد احتمال نجاح حسنين في المادة، اي ايجاد [P(B)].

وبالاعتماد على نظرية (4)، نحصل على:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\therefore P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(A \cap B)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2}$$

$$= 0.58$$

مثال (9):

اذا كانت لدينا الحادثتين (A) و (B) ، بحيث ان:

$P(A) = 0.3$

$P(B) = 0.6$

$P(A \cup B) = 0.4$

المطلوب: جد ما يأتي:

(1) $P(A \cap B)$

(2) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$

(3) $P(\overline{A} \cap B)$

Solution:

(1) $\because P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

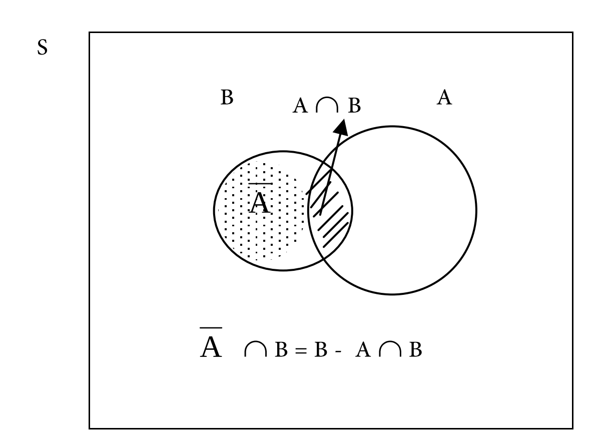
$$\therefore P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

$$= 0.3 + 0.6 - 0.4$$

$$= 0.5$$

(2) $$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B})$$
$$= 1 - P(A \cup B)$$
$$= 1 - 0.4$$
$$= 0.6$$

(3) $$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$
$$= 0.6 - 0.5$$
$$= 0.1$$



2-2: الاحتمال الشرطي: The Conditional Probability

اذا كان لدينا الحادثتان (A) و (B) .

فإن احتمال حدوث الحادثة (A) اذا علمنا بحدوث الحادثة (B)، يسمى الاحتمال الشرطي، ويرمز له بالرمز P (A/B)، ويعرف بالصيغة الآتية:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad , \text{ If } P(B) > 0.$$

مثال (10) :

اذا كان احتمال نجاح علاء في الامتحان النهائي هو ($\frac{1}{2}$)، واحتمال نجاح علاء ومحمد هو ($\frac{1}{3}$).

المطلوب: جد احتمال نجاح محمد اذا علم بأن علاء قد نجح.

Solution:

نفرض ان الحادثتان (A) و (B) ، تمثلان الآتي:

A : {نجاح علاء} $\Rightarrow \quad \therefore\ P(A) = \frac{1}{2}$

B : {نجاح محمد}

$A \cap B$: {نجاح علاء ومحمد} $\Rightarrow \quad \therefore\ P(A \cap B) = \frac{1}{3}$

وعليه يكون احتمال نجاح محمد اذا عُلم نجاح علاء، كالاتي:

$$\therefore\ P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$= \frac{1/3}{1/2}$$

$$= \frac{2}{3}$$

$$= 0.67$$

Note:

$$P(A \cap B) = P(B \cap A)$$

3-2: الحوادث المستقلة: The Independent Events

اذا كانت لدينا الحادثتان (A) و (B).

فيقال بأن الحادثتين مستقلتان، اذا تحققت واحدة فقط من العلاقات الآتية:

(1) $P(A/B) = P(A)$

(2) $P(B/A) = P(B)$

(3) $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$ [تُعد أهم العلاقات]

مثال (11):

إثبت أن:

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(A / B) * P(B) = P(B / A) * P(A)$$

Proof:

$\because \; A \cap B = B \cap A$

$\therefore \; P(A \cap B) = P(B \cap A) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$\because \; P(A / B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$\therefore \; P(A / B) * P(B) = P(A \cap B) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

$\because \; P(B / A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)}$

$\therefore \; P(B / A) * P(A) = P(B \cap A) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$

من العلاقات الثلاث اعلاه، يتضح بأن:

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(A/B) * P(B) = P(B/A) * P(A)$$

مثال (12):

اذا كان نجاح حسنين في امتحان بحوث العمليات هو ($\frac{1}{4}$)، واحتمال نجاح ليث هو ($\frac{1}{2}$) في نفس الامتحان، واحتمال نجاح الاثنين معا هو ($\frac{1}{6}$).

المطلوب:

اثبت هل ان نجاح حسنين مستقلا عن نجاح ليث ام لا.

Solution

نفرض ان الحادثتين (A) و (B)، تمثلان الآتي:

A : {نجاح حسنين} $\Rightarrow \therefore P(A) = \frac{1}{4}$

B : {نجاح ليث} $\Rightarrow \therefore P(B) = \frac{1}{2}$

$A \cap B$: {نجاح الاثنين معا} $\Rightarrow \therefore P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

$$\because \quad P(A) * P(B) = \frac{1}{4} * \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{8}$$

أي أن:

$$P(A \cap B) \neq P(A) * P(B) \quad , \quad \left[\frac{1}{6} \neq \frac{1}{8}\right]$$

∴ الحادثتان (A) و (B) غير مستقلتين (Dependent) ، أي ان [نجاح حسنين غير مستقل عن نجاح ليث].

مثال (13):

اذا كانت لدينا الحادثتين (A) و (B)، بحيث ان:

$P(A) = 0.5$

$P(\overline{B}) = 0.6$

$P(A \cup B) = 0.8$

المطلوب: جد ما يأتي:

(1) $P(B)$.

(2) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$.

(3) $P(A / \overline{B})$.

(4) $P(B / A)$.

Solution:

(1) $\because P(B) + P(\overline{B}) = 1$

$\therefore P(B) = 1 - P(\overline{B})$

$= 1 - 0.6$

$= 0.4$

(2) $\because\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\therefore\ P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

$= 0.5 + 0.4 - 0.8$

$= 0.1$

$\therefore\ P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B})$

$= 1 - P(A \cap B)$

$= 1 - 0.1$

$= 0.9$

(3) $P(A / \overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})}$, $\because\ P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

$= \frac{0.4}{0.6}$ $= 0.5 - 0.1$

≈ 0.67 $= 0.4$

(4) $P(B / A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$

$= \frac{0.1}{0.5}$

$= 0.2$

4-2: الاحتمال الكلي: The Total Probability

اذا كان لدينا (n) من الحوادث المتنافية وهي $[B_1, B_2, B_3, .., B_n]$ ضمن فضاء العينة (S)، بحيث ان $[P(B_i) > 0, \forall i, i = 1, 2, .., n]$.

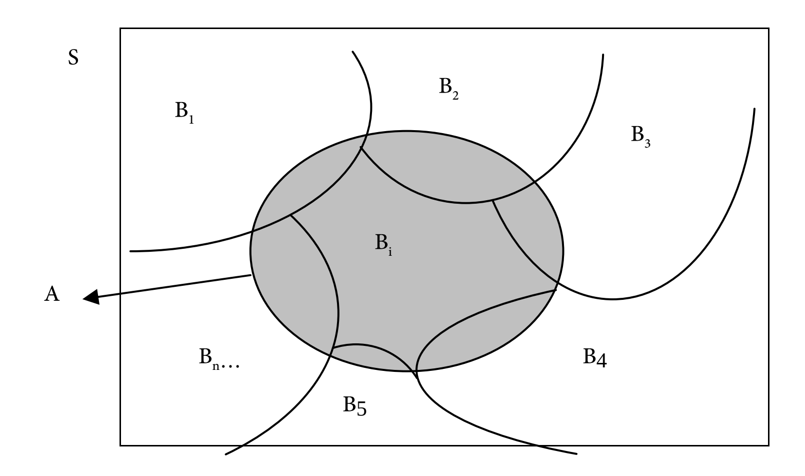
فإن احتمال اي حادثة ولتكن (A) في المجموعة الشاملة (S)، يكون:

$P(A) = P(B_1) * P(A / B_1) + P(B_2) * P(A/B_2)+\ldots + P(B_n) * P(A/B_n)$

أو تكتب بالصيغة الآتية:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) * P(A / B_i)$$

Proof:



(Venn Diagram)

يتضح من شكل فن (Venn) السابق، بأن الحادثة (A) هي عبارة عن اتحاد تقاطعات الحوادث المتنافية $[B_n \cap A, ..., B_2 \cap A, B_1 \cap A]$ ، أي أن:

$$A = (B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \cup (B_3 \cap A) \cup .... \cup (B_n \cap A)$$

وبأخذ الاحتمال للطرفين، نحصل على:

$$\because\ P(A) = P[(B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \cup .... \cup (B_n \cap A)$$
$$= P(B_1 \cap A) + P(B_2 \cap A) + ... + P(B_n \cap A)$$
$$= P(B_1) * P(A / B_1) + P(B_2 * P(A / B_2) + ... + P(B_n * P(A/B_n)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} P(B_i) * P(A / B_i)$$

مثال (14):

ثلاث مكائن هي [III , II , I] تنتج [35% ، 40% ، 25%] على الترتيب من انتاج المصنع الكلي، علما ان نسبة المعيب من انتاج المكائن الثلاث هي [6% ، 3% ، 8%] ، على الترتيب ايضا.

فإذا اختيرت وحدة واحدة من الانتاج النهائي للمصنع عشوائيا، فما هو احتمال ان تكون هذه الوحدة معيبة؟

Solution:

نفرض الحوادث [M_3 , M_2, M_1] التالية، تمثل ما يأتي:

$\therefore$ M_1 : { سحب وحدة من انتاج الماكنة (I) } $\Longrightarrow$ $\therefore$ $P(M_1) = 0.35$

M_2 : { سحب وحدة من انتاج الماكنة (II) } $\Longrightarrow$ $\therefore$ $P(M_2) = 0.40$

M_3 : { سحب وحدة من انتاج الماكنة (III) } $\Longrightarrow$ $\therefore$ $P(M_3) = 0.25$

عليه فإن مجموع الاحتمالات الثلاث، تكون:

$$P(M_1) + P(M_2) + P(M_3) = 1$$

نفرض ايضا الحادثة (D)، تمثل ما يأتي:

D : { سحب وحدة معيبة } $\Longrightarrow$ $P(D) = ?$

$\because$ $P(D/M_1) = 0.06$. تمثل احتمال سحب وحدة معيبة من انتاج الماكنة (I) .

$P(D/M_2) = 0.03$. تمثل احتمال سحب وحدة معيبة من انتاج الماكنة (II) .

$P(D/M_3) = 0.08$. تمثل احتمال سحب وحدة معيبة من انتاج الماكنة (III) .

وباستخدام نظرية (الاحتمال الكلي)، نحصل على احتمال ان تكون الوحدة معيبة:

$$\therefore \quad P(D) = P(M_1) * P(D/M_1) + P(M_2) * P(D/M_2) + P(M_3) * P(D/M_3)$$
$$= 0.35 * 0.06 + 0.40 * 0.03 + 0.25 * 0.08$$
$$= 0.021 + 0.012 + 0.020$$
$$= 0.053$$

مثال (15):

يقوم المهندسان (علاء وأحمد) بانجاز تصاميم مشروع الفيصل السكني بنسبة (60%، 40%) على الترتيب، وإن احتمال وجود خطأ في تصاميم المهندسين المذكورين كان (1% ، 2%) على الترتيب ايضا.

فإذا سحب احد التصاميم المنجزة عشوائيا، فما هو احتمال أن يكون هذا التصميم فيه خطأ (معيب)؟

Solution:

نفرض الحادثتان (E_2, E_1) ، لتمثل ما يأتي:

E_1 : {سحب تصميم من انجاز المهندس علاء} $\Longrightarrow$ $\therefore$ $P(E_1) = 0.6$

E_2 : {سحب تصميم من انجاز المهندس أحمد} $\Longrightarrow$ $\therefore$ $P(E_2) = 0.4$

نفرض ايضا الحادثة (D)، لتمثل ما يأتي:

$D = \{$(سحب تصميم فيه خطأ (معيب))$\} \Rightarrow P(D) = ?$

يمثل احتمال سحب تصميم فيه خطأ من انجاز المهندس علاء $\because$ $P(D/E_1)=0.01$

يمثل احتمال سحب تصميم فيه خطأ من انجاز المهندس أحمد $P(D/E_2)=0.02$

وباستخدام نظرية الاحتمال الكلي، نحصل على احتمال أن يكون التصميم المسحوب فيه خطأ:

$$\therefore P(D) = P(E_1) * P(D/E_1) + P(E_2) * P(D/E_2)$$
$$= 0.6 (0.01) + 0.4 (0.02)$$
$$= 0.006 + 0.008$$
$$= 0.014$$

5-2: نظرية بييز: Baye's Theory

اذا كان لدينا (n) من الحوادث المتنافية هي $[An, ...A_3, A_2, A_1]$ ضمن فضاء العينة (S)، بحيث ان $[A_i \cap A_j = \phi, \forall\ i \neq j\ ,\ i,j = 1,2,...,n]$ ، وإن فضاء العينة هو

$[S = A_n \cup ... \cup A_3 \cup A_2 \cup A_1]$.

واذا كانت الحادثة (B) معرفة على نفس فضاء العينة (S)، وان جميع الاحتمالات الشرطية معلومة $[P(B/A_j)\ ,\ j = 1, 2, ..., n]$.

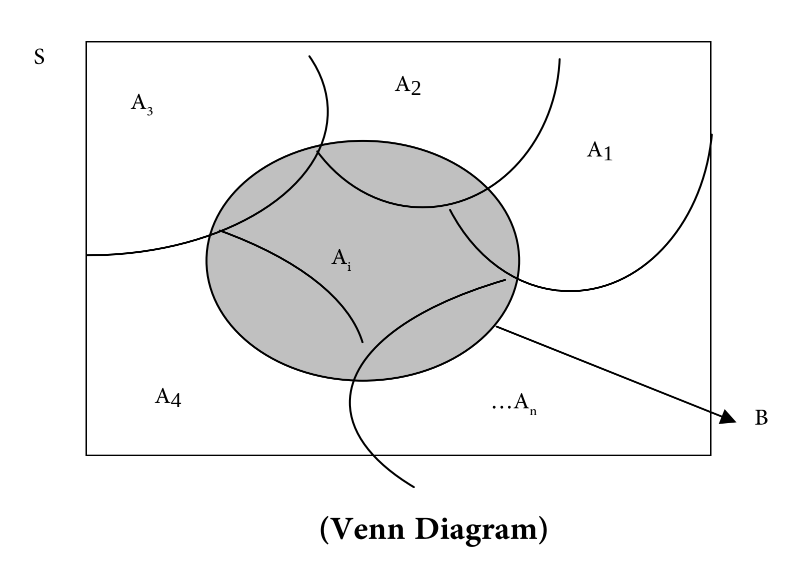
فإن $P(A_j / B)$ يعطى بالصيغة الآتية:

$$P(A_j / B) = \frac{P(B/A_j) * P(A_j)}{\sum_{i-1}^{n} P(B/A_i) * P(A_i)}$$

Proof:

$$\because P(A_j/B) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)} \qquad .... (1)$$

$$\therefore P(A_j/B) = \frac{P(B/A_j) * P(A_j)}{P(B)} \qquad .... (2)$$



(Venn Diagram)

يتضح من شكل فن (Venn) السابق، بأن الحادثة (B)، هي عبارة عن:

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \ldots \cup (A_n \cap B)$$

وبأخذ الاحتمال للطرفين، نحصل على:

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + (A_2 \cap B) + \ldots + (A_n \cap B)$$

$$= P(B/A_1) * P(A_1) + P(B/A_2) * P(A_2) + \ldots + P(B/A_n) * P(A_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(B/A_i) * P(A_i) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

بتعويض ناتج العلاقة (3) في العلاقة (2) ينتج:

$$P(A_j/B) = \frac{P(B/A_j) * P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B/A_i) * P(A_i)}$$

مثال (16) :

مصنع انتاجي يحتوي على ثلاث مكائن انتاجية [III , II, I] تنتج ما نسبته [35% , 40% , 25%] على الترتيب، من الانتاج الكلي للمصنع، علما بأن نسبة التالف (المعيب) منه للمكائن الثلاث هي [6% , 3% , 8%] على الترتيب ايضا. فإذا سُحبت وحدة واحدة من الانتاج النهائي للمصنع عشوائيا، فما هو احتمال ان تكون الوحدة المسحوبة من انتاج الماكنة [II] ، اذا علمت ان الوحدة معيبة؟

Solution:

نفرض الحوادث $[M_3, M_2, M_1]$ التالية، تمثل ما يأتي:

M_1 : { (I) سحب وحدة من انتاج الماكنة } $\Rightarrow \therefore P(M_1) = 0.35$

M_2 : { (II) سحب وحدة من انتاج الماكنة } $\Rightarrow \therefore P(M_2) = 0.40$

M_3 : { (III) سحب وحدة من انتاج الماكنة } $\Rightarrow \therefore P(M_3) = 0.25$

نفرض ايضا الحادثة (D)، لتمثل ما يأتي:

D : {سحب وحدة معيبة }

$\because P(D/M_1) = 0.06$

$P(D/M_2) = 0.03$

$P(D/M_3) = 0.08$

عليه فإن احتمال ان تكون الوحدة معيبة ومن انتاج الماكنة (II)، كالاتي:

$$\therefore P(M_2/D) = \frac{P(D/M_2)*P(M_2)}{P(D/M_1)*P(M_1)+P(D/M_2)*P(M_2)+P(D/M_3)*P(M_3)}$$

$$= \frac{0.03*0.40}{0.06*0.35+0.03*0.40+0.08*0.25}$$

$$= \frac{0.012}{0.053}$$

$$= \frac{12}{53}$$

$$\approx 0.23$$

مثال (17):

صندوقان، يحتوي الأول على (5) كرات حمراء و (4) خضراء، اما الصندوق الثاني يحتوي على (7) كرات حمراء و(3) خضراء.

اختير احد الصناديق عشوائيا، وسحبت منه كرة بطريقة عشوائية.

المطلوب: جد ما يأتي:

1- احتمال ان تكون الكرة المسحوبة خضراء.

2- اذا تم سحب كرة وتبين بأنها خضراء، فما هو احتمال أن تكون هذه الكرة من الصندوق الأول؟

Solution:

نفرض الحوادث $[B_2, B_1]$ التالية، تمثل ما يأتي:

B_1 : { تمثل سحب الكرة من الصندوق الأول }

B_2 : { تمثل سحب الكرة من الصندوق الثاني }

$$\therefore\ P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2}$$

نفرض ايضا الحادثة (G)، لتمثل ما يأتي:

G : { تمثل الكرة المسحوبة بأنها خضراء }

$\because\ P(G / B_1) = \frac{4}{9}$ يمثل احتمال سحب كرة خضراء من الصندوق الأول

$P(G / B_2) = \frac{3}{10}$ يمثل احتمال سحب كرة خضراء من الصندوق الثاني

(1) $\therefore$ احتمال ان تكون الكرة المسحوبة خضراء، نستخدم نظرية الاحتمال الكلي، أي أن:

$$P(G) = P(G/B_1) * P(B_1) + P(G/B_2) * P(B_2)$$

$$= \frac{4}{9} * \frac{1}{2} + \frac{3}{10} * \frac{1}{2}$$

$$= 0.22 + 0.15$$

$$= 0.37$$

(2) احتمال ان تكون الكرة من الصندوق الأول، اذا عُلمت بأنها خضراء:

$$P(B_1/G) = \frac{P(G/B_1)*P(B_1)}{P(G/B_1)*P(B_1)+P(G/B_2)*P(B_2)}$$

$$= \frac{0.22}{0.37}$$

$$= 0.59$$

مثال (18):

تقوم ثلاث مهندسات (وسن، فاتن، آلاء) بانجاز بناء مشروع الفيصل السكني بنسبة [38%، 32%، 30%] على الترتيب، وإن احتمال وجود خطأ في بناء الوحدات السكنية من قبل المهندسات المذكورات كان [1%، 3%، 2%] على الترتيب ايضا.

فإذا اختيرت وحدة سكنية عشوائيا، فما هو احتمال أن تكون الوحدة السكنية من انجاز المهندسة (وسن)، اذا عُلمت بأن الوحدة السكنية فيها أخطاء (معيبة)؟

Solution:

نفرض الحوادث (E_3, E_2, E_1) ، لتمثل ما يأتي:

E_1 : {سحب وحدة سكنية من انجاز المهندسة وسن} $\Rightarrow \therefore P(E_1) = 0.38$

E_2 : {سحب وحدة سكنية من انجاز المهندسة فاتن} $\Rightarrow \therefore P(E_2) = 0.32$

E_3 : {سحب وحدة سكنية من انجاز المهندسة آلاء} $\Rightarrow \therefore P(E_3) = 0.30$

نفرض ايضا الحادثة (D)، لتمثل ما يأتي:

D = {سحب وحدة سكنية فيها أخطاء (معيبة)} $\Rightarrow P(D) = ?$

$\because$ $P(D/E1) = 0.01$ تمثل احتمال سحب وحدة سكنية فيها أخطاء من انجاز المهندسة وسن

$P(D/E_2) = 0.03$ تمثل احتمال سحب وحدة سكنية فيها أخطاء من انجاز المهندسة فاتن

$P(D/E_3) = 0.02$ تمثل احتمال سحب وحدة سكنية فيها أخطاء من انجاز المهندسة آلاء

$$\therefore P(D) = P(E_1) * P(D/E_1) + P(E_2) * P(D/E_2) + P(E_3) * P(D/E_3)$$
$$= 0.38\ (0.01) + 0.32\ (0.03) + 0.30\ (0.02)$$
$$= 0.0038 + 0.0096 + 0.006$$
$$= 0.0194$$

عليه فإن احتمال أن تكون الوحدة السكنية المسحوبة من انجاز المهندسة (وسن)، إذا عُلمت بأنها معيبة:

$$P(E_1/D) = \frac{P(E_1) * P(D/E_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(E_i) * P(D/E_i)}$$

$$= \frac{0.0038}{0.0194}$$

$$\approx 0.196$$

أسئلة عامة حول الفصل الثاني

س1: رميت زهرتا نرد مرة واحدة، احسب احتمال ظهور مجموع الرقمين على وجه الزهرتين:

(1) A = { أكبر من أو يساوي (8) }

(2) B = { اكبر من (10) } .

(3) C = { عدد زوجي وأكبر من (6) }.

(4) جد $P(A \cup B)$ ، $P(A \cap B)$.

(5) جد $P(B \cup C)$ ، $P(B \cap C)$.

س2: اختيرت عينة مكونة من (3) مصابيح عشوائياً، من انتاج مصنع للمصابيح الكهربائية.

احسب عناصر الحوادث التالية واحتمال كل منها:

(1) فضاء العينة (S).

(2) A = { جميع المصابيح معيبة } .

(3) B = { مصباح واحد واحد على الأكثر معيب}.

(4) C ={ مصباح واحد على الأقل معيب} .

(5) جد $(A \cap \overline{B}), (C \cup B), (B \cap A)$

تذكر بأن:

G: يرمز للمصباح الجيد

D: يرمز للمصباح المعيب.

س3: اذا كان لديك الحوادث الاتية:

$S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

$A = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$

$B = \{ 4, 5, 6, 7\}$

$C = \{ 1, 2, 3, 5, 12\}$

المطلوب: احسب احتمال الحوادث الآتية:

(1) $P(\overline{A \cap B})$, $P(A \cap \overline{B})$.

(2) $P(A \cap \overline{B} \cap \overline{C})$, $P(\overline{A \cap B \cap C})$.

س4: اذا كان لديك قيم الاحتمالات الآتية:

$P(A \cup B) = 0.72$

$P(A) = 0.6$

$P(B) = 0.3$

المطلوب: جد ما يأتي:

(1) $P(\overline{A})$, $P(\overline{B})$.

(2) $P(A \cap B)$, $P(\overline{A} \cap \overline{B})$

(3) Is (A) and (B) be Independent?

س5 : إذا كان احتمال أن يصيب علاء هدفاً ما هو ($\frac{1}{3}$)، واحتمال أن يصيب محمد الهدف هو ($\frac{1}{4}$). إحسب احتمال أن يصيب احدهما على الاقل الهدف.

س6 : إذا كان احتمال أن يكون الجو ملبداً بالغيوم هو (0.3)، واحتمال أن يكون الجو عاصفا هو (0.5)، واحتمال أن يكون الجو ملبداً بالغيوم أو عاصفاً هو (0.6).

المطلوب: إحسب احتمال الحوادث الآتية:

(1) E_1 : = { أن يكون الجو ملبداً بالغيوم وعاصفا}.

(2) E_2 : = { أن يكون الجو ملبداً بالغيوم وغير عاصف}.

(3) E_3 : = { أن يكون الجو غير ملبد بالغيوم وغير عاصف}.

س7: إذا كان لديك المعلومات الآتية:

$P(A) = 0.5$

$P(A \cap B) = 0.4$

المطلوب: إحسب احتمال الحادثة (B)، الذي يجعل كل من الحادثتين A و B مستقلتين.

س8: إذا كان لديك المعلومات الآتية:

$P(A) = 0.4$

$P(B) = 0.5$

$P(A \cup B) = 0.6$

المطلوب: جد ما يأتي:

(1) $P(A \cap \overline{B})$, $P(B \cap \overline{A})$.

(2) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$, $P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

س9: إذا كان لديك المعلومات الآتية:

$P(A) = 0.5$

$P(B / A) = 0.8$

$P(B / \overline{A}) = 0.2$

المطلوب: جد ما يأتي:

(1) $P(A \cap B)$, $P(B \cap \overline{A})$, $P(B)$, $P(A \cup B)$.

(2) $P(A / B)$, $P(A / \overline{B})$, $P(\overline{B} / A)$, $P(\overline{A} / \overline{B})$.

س10: إذا كان احتمال نجاح حسنين في مادة بحوث العمليات هو ($\frac{1}{3}$)، واحتمال نجاحه في مادة الاحصاء الرياضي هو ($\frac{1}{2}$)، واحتمال نجاحه في مادتي بحوث العمليات والاحصاء الرياضي هو ($\frac{1}{12}$).

المطلوب:

إحسب احتمال الحوادث الآتية:

(1) E_1 : { نجاح حسنين في مادة واحدة على الأقل }.

(2) E_2 : { نجاح حسنين في مادة الاحصاء الرياضي إذا علم انه نجح في بحوث العمليات }.

(3) E_3 : { رسوب حسنين في مادة الاحصاء الرياضي إذا علم انه نجح في بحوث العمليات }.

س11: إذا كان لديك المعلومات الآتية:

$P(A) = 0.4$

$P(A / B) = 0.4$

$P(B / A) = 0.6$

المطلوب: جد ما يأتي:

(1) Is A and B be independent?

(2) $P(B)$, $P(A \cup B)$, $P(A \cap \overline{B})$.

(3) $P(\overline{B}/A)$, $P(B/\overline{A})$, $P(\overline{A}/\overline{B})$.

س12: إذا كان لديك المعلومات الآتية:

$P(A) = 0.6$

$P(B/A) = 0.5$

$P(B/\overline{A}) = 0.5$

المطلوب: جد ما يأتي:

(1) $P(B)$, $P(A \cup B)$.

(2) $P(A/B)$, $P(A/\overline{B})$.

(3) Is A and B be independent?

س13: يتوفر لدى مديرية الدفاع المدني لمدينة السلط، اطفائيتان، وكان احتمال وصول الاطفائية الاولى إلى مكان الحريق في الوقت المناسب (0.8)، واحتمال وصول الثانية إلى نفس المكان في الوقت المناسب كان (0.75)، واحتمال وصول احدهما على الاقل في الوقت المناسب كان (0.9).

المطلوب: إحسب احتمال الحوادث الآتية:

(1) E_1 : { وصول الاطفائيتين معا إلى مكان الحريق في الوقت المناسب }.

(2) E_2 : { وصول الاطفائية الاولى وعدم وصول الثانية في الوقت المناسب }.

(3) E_3 : { وصول الاطفائية الثانية إذا علم وصول الاولى إلى مكان الحريق في الوقت المناسب }.

س14: تقوم كل من (دينا وبسمة) بانجاز طبع مراسلات شركة النصر لاستيراد وتصدير الاجهزة الهندسية بنسبة (55% ، 45%) على الترتيب، وكانت نسبة الخطأ في طباعة كل منهن على الترتيب (4% ، 2%) .

اختير جزء من مراسلات الشركة المذكورة عشوائيا، وسحبت ورقة من هذه المراسلات بطريقة عشوائية. ما احتمال وجود خطأ في الورقة المسحوبة ؟

س15: مصنع إنتاجي يقوم بانتاج ثلاثة احجام من الثلاجات هي [III, II , I] بنسب [40%, 50% , 10%] على الترتيب، وكانت نسب المعيب في انتاج الاحجام الثلاثة على الترتيب [3%, 1%, 2%] .

اختير احد الاحجام عشوائيا، واختيرت ثلاجة من انتاج هذا الحجم بطريقة عشوائية.

المطلوب: جد ما يأتي:

(1) إحتمال أن تكون الثلاجة معيبة.

(2) إذا كانت الثلاجة المختارة معيبة، فما هو احتمال ان تكون من الحجم الثاني؟

س16: ثلاثة اكياس فاكهة، يحتوي الكيس الاول منها على (3) تفاحات و (6) برتقالات، ويحتوي الثاني على (6) تفاحات و (4) برتقالات، اما الكيس الثالث فإنه يحتوي على (5) تفاحات و (4) برتقالات.

تم اختيار أحد الاكياس عشوائيا، واختيرت منه حبة فاكهة بطريقة عشوائية.

المطلوب: جد ما يأتي

(1) إحتمال أن تكون حبة الفاكهة تفاحة.

(2) إحتمال أن تكون حبة الفاكهة من الكيس الثاني، إذا عُلم بأنها تفاحة.

الفصل الثالث
المتغيرات العشوائية
Random Variables

1-3 : مقدمة :

سبق وان تم عرض وتوضيح بعض القواعد الاحتمالية في الفصل الثاني، واوضحنا إن هذه القواعد ترتبط بنتائج تجربة عشوائية معينة، وفي هذا الفصل سيتم التعبير عن نتائج التجربة العشوائية بمقياس عددي يطلق عليه اسم المتغير (Variable)، وبما إن القيمة العددية لهذا المتغير غير مؤكدة مما سيشار إليه بالمتغير العشوائي (Random Variable)، إذ إن القيم المختلفة للمتغير العشوائي ترتبط بقيم احتمالية معينة، مما ستشكل معاً ما يسمى بالتوزيع الاحتمالي (Probability Distribution) .

وتأسيساً على ما تقدم، يمكن تعريف المتغير العشوائي (Random Variable) بانه "عبارة عن قيمة عددية لكل نتيجة من نتائج التجربة العشوائية، ويرمز له بالرمز (X)".

وتكون المتغيرات العشوائية، على نوعين، هما :

1- المتغير العشوائي المتقطع (المنفصل) Discrete Random Variable
2- المتغير العشوائي المستمر (المتصل) Continuous Random Variable

وفيما يلي شرحاً مفصلاً لكلا النوعين من المتغيرات، وعلى النحو الآتي:

2-3 : المتغير العشوائي المنفصل: Discrete Random Variable

هو المتغير الذي يكون المجال المقابل له منتهياً أو غير منتهٍ ويكون قابلاً للعد، إذ يمكن كتابة قيمته المميزة بالشكل الآتي:

$X : x_1 , x_2 , x_3 , ... , x_i , ... , x_n$

أو

$X : x_1 , x_2 , x_3 , ... , x_i , ...$

ومن أمثلة هذا النوع من المتغيرات، ما يأتي:

1- عدد التدريسيين في جامعة فيلادلفيا لسنة معينة.
2- عدد الحوادث المرورية في مدينة عمان خلال شهر شباط.
3- عدد المصابيح التالفة في انتاج شركة ما لشهر معين.
4- عدد مرات ظهور الكتابة (T) عند رمي قطعة نقود معدنية (n) من المرات.
5- الارقام التي تظهر على وجه زهرة نرد متجانسة.

1-2-3 : التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل :

Probability Distribution for (DRV)

إن لكل قيمة من قيم المتغير العشوائي المنفصل، قيمة احتمالية مرافقة، فعلى سبيل المثال القيمة (x_i) ، يكون الاحتمال المرافق لها هو $[P(X = x_i)]$ ، عليه فان:

$$X : x_1 ,\ x_2 ,\ x_3 ,\ \ldots ,\ x_i ,\ \ldots ,\ x_n .$$

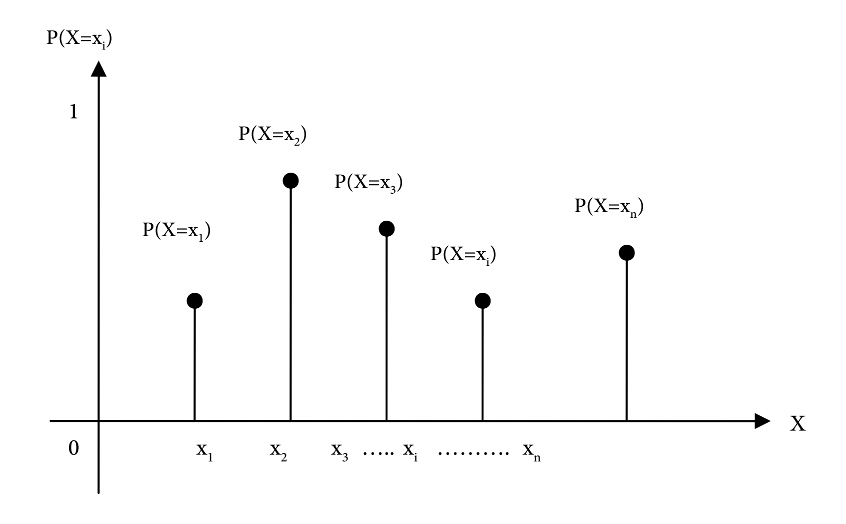
$$P(X) : P(X = x_1) ,\ P(X = x_2) ,\ P(X = x_3),\ \ldots ,\ P(X = x_i) ,\ \ldots ,\ P(X = x_n)$$

وتسمى الاحتمالات اعلاه، بدالة التوزيع الاحتمالي وتدعى احياناً بدالة الكتلة الاحتمالية (Probability Mass Function-p.m.f) للمتغير العشوائي المنفصل (X) ، وتتصف هذه الدالة بالخاصيتين الآتيتين:

$$(1) \qquad 0 < P(X = x_i) < 1$$

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1$$

والشكل البياني التالي، يوضح دالة التوزيع الاحتمالي الخاصة بالمتغير العشوائي المنفصل:



وفيما يلي بعض الأمثلة، لتوضيح الكيفية التي بموجبها يتم ايجاد قيم المتغير العشوائي المنفصل ودالة التوزيع الاحتمالي له :

مثال (1) :

عند رمي قطعة نقود متجانسة مرتين متتاليتين في تجربة عشوائية.

المطلوب:

1- عرف المتغير العشوائي (X) بانه عدد مرات ظهور الصورة (H) .
2- ايجاد دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (X) .
3- رسم دالة التوزيع الاحتمالي $P(X = x_i)$.

الحل:

1- يمكن تعريف المتغير العشوائي المنفصل (X) ، على أنه عدد مرات ظهور الصورة (H) ، أي ان: { عدد مرات ظهور الصورة } : X .

عليه فان قيم المتغير العشوائي المنفصل (X) على فضاء العينة (S) ، تكتب كالآتي:

S	(HH)	(HT)	(TH)	(TT)
X	2	1	1	0

$, n(S) = 4$

اي ان قيم المتغير العشوائي المنفصل (X) ، هي :

$X = 0 , 1 , 2$

وبالتالي فان المجال المقابل للمتغير العشوائي المنفصل (X) على فضاء العينة (S)، يكتب كالآتي:

$X(S) = \{ 0 , 1 , 2 \}$

2- دالة التوزيع الاحتمالي $P(X = x_i)$:

بالرجوع الى فضاء العينة (S) ، يمكن كتابة قيم دالة التوزيع الاحتمالي $P(X= x_i)$ لعناصر المجال المقابل للمتغير العشوائي المنفصل (X) ، على النحو الآتي:

$$P(X = 0) = P (TT) = \frac{1}{4}$$

$$P(X = 1) = P \{ (HT) , (TH) \} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(X = 2) = P (HH) = \frac{1}{4}$$

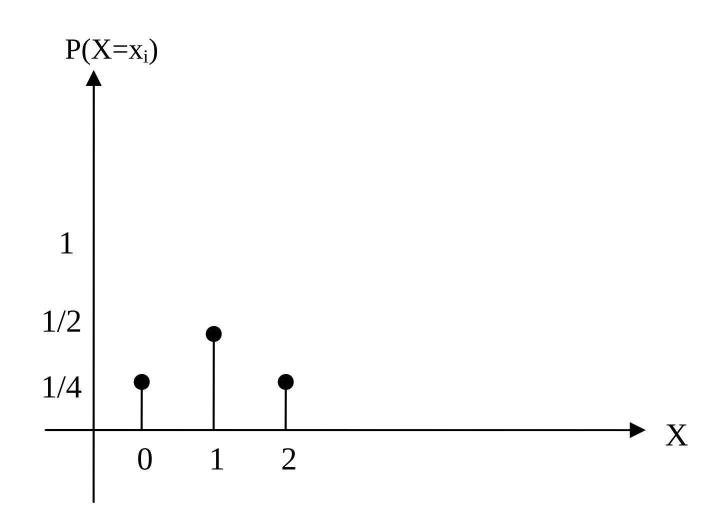
والجدول التالي، يوضح قيم المتغير العشوائي المنفصل (X) وقيم دالة التوزيع الاحتمالي المرافقة لقيم المتغير (X) :

X	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

واخيراً، يمكن كتابة صيغة دالة التوزيع الاحتمالي $P(X = x_i)$ ، على الوجه الآتي:

$$P(X = x_i) = \begin{cases} \frac{1}{4} & , \quad x_i = 0, 2 \\ \frac{1}{2} & , \quad x_i = 1 \\ o & , \quad \text{otherwise} \end{cases}$$

3- يمكن رسم دالة التوزيع الاحتمالي $P(X = x_i)$ كالآتي:



مثال (2) :

عند رمي زهرتي نرد منتظمتين مرة واحدة في تجربة عشوائية .

المطلوب :

1- عرف المتغير العشوائي (X) بانه يمثل مجموع الوجهين الذين يظهران.
2- ايجاد دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (X) .
3- اثبت إن دالة التوزيع الاحتمالي هي دالة كتلة احتمالية (p.m.f) .

الحل:

1- يُعرف المتغير العشوائي المنفصل (X) ، بانه يمثل مجموع ما يظهر علـى الـوجهين، اي إن: { مجموع الرقمين التي تظهر على الوجهين } = X .

$S = \{ (1,1), (1,2), (1,3), ..., (1,6), ..., (6,1), (6,2), (6,3), ... , (6,6) \}$

$n(S) = 36$

يمكن كتابة قيم المتغير العشوائي المنفصل (X) على فضاء العينة (S)، على النحو الآتي:

S	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(1,3)	(3,1)	(2,2)	(1,4)	(4,1)	(2,3)	(3,2)	…..	(6,6)
X	2	3	3	4	4	4	5	5	5	5	…..	12

عليه فان المجال المقابل للمتغير العشوائي المنفصل (X) على فضاء العينة (S) ، يكتب كالآتي:

$X(S) = \{2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10 , 11 , 12 \}$

2- دالة التوزيع الاحتمالي $P(X=x_i)$:

بالرجوع الى فضاء العينة (S) ، يمكن كتابة قيم دالة التوزيع الاحتمالي [$P(X=x_i)$]، لعناصر المجال المقابل للمتغير العشوائي المنفصل (X) ، على النحو الآتي:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

واخيراً، يمكن كتابة صيغة دالة التوزيع الاحتمالي $P(X=x_i)$ ، كالآتي:

$$P(X = x_i) = \begin{cases} \frac{1}{36} & , \quad x_i = 2,12 \\ \frac{1}{18} & , \quad x_i = 3,11 \\ \frac{1}{12} & , \quad x_i = 4,10 \\ \frac{1}{9} & , \quad x_i = 5,9 \\ \frac{5}{36} & , \quad x_i = 6,8 \\ \frac{1}{6} & , \quad x_i = 7 \\ 0 & , \quad \text{otherwise} \end{cases}$$

3- لاثبات إن دالة التوزيع الاحتمالي $[P(X=x_i)]$ هي دالة كتلـة احتماليـة (p.m.f) ، ينبغـي ان تتحقق الخاصيتين الآتيتين:

(a) $0 < P(X = x_i) < 1$

إن جميع القيم الاحتمالية $[P(X= x_i)]$ الواردة بالجدول السابق، هي اكبر من (الصفر) واقل من (الواحد) الصحيح، مما يؤكد تحقق الخاصية الأولى.

(b)

$$\because \sum_{i=1}^{11} P(X = x_i) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36} + \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36}$$

$$= \frac{36}{36}$$

$$= 1$$

$\therefore$ دالة التوزيع الاحتمالي $[P(X= x_i)]$ هي دالة كتلة احتمالية (p.m.f) .

مثال (3) :

عند رمي عملة معدنية وزهرة نرد متجانستين مرة واحدة في تجربة عشوائية.

المطلوب:

1- عرف المتغير العشوائي (X) ، بانه يمثل ظهور الرقم (2) .
2- ايجاد دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (X) .
3- إثبت إن دالة التوزيع الاحتمالي هي دالة كتلة احتمالية (p.m.f) .

الحل :

1- النتائج الممكنة للتجربة، تتمثل بفضاء العينة (S) ، الآتي :

$$S = \begin{Bmatrix} (H,1),(H,2),(H,3),(H,4),(H,5),(H,6) \\ (T,1),(T,2),(T,3),(T,4),(T,5),(T,6) \end{Bmatrix} \quad , \quad n(S) = 12$$

عليه فان قيم المتغير العشوائي (X) ، وفقاً لفضاء العينة (S) ، هي :

S	(H, 1)	(H, 2)	(H, 3)	(H, 4)	(H, 5)	(H, 6)	(T, 1)	(T, 2)	(T, 3)	(T, 4)	(T, 5)	(T, 6)
X	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0

عليه يكون المجال المقابل للمتغير العشوائي (X) على فضاء العينة (S) ، كالآتي:

$X(S) = \{ 0 , 1 \}$

2- دالة التوزيع الاحتمالي $P(X= x_i)$:

إن القيم الاحتمالية [$P(X= x_i)$] المرافقة لقيم المتغير العشوائي (X) ، تكتب على النحو الآتي:

X	0	1
$P(X= x_i)$	$\frac{10}{12}$	$\frac{2}{12}$

والصيغة التالية، تمثل الصيغة العامة لدالة التوزيع الاحتمالي:

$$P(X = x_i) = \begin{cases} \frac{5}{6} & , \quad x_1 = 0 \\ \frac{1}{6} & , \quad x_2 = 1 \\ 0 & , \quad o/w \end{cases}$$

3- لاثبات إن دالة التوزيع الاحتمالي [$P(X= x_i)$] ، هي دالة كتلة إحتمالية (p.m.f) ، ينبغي أن تتحقق الخاصيتين الآتيتين:

(a) $0 < P(X = x_i) < 1$

إن جميع القيم الاحتمالية [$P(X= x_i)$] الواردة بالجدول السابق، هي اكبر من (الصفر) واقل من (الواحد) الصحيح، مما يؤكد تحقق الخاصية الاولى.

(b) $\because \sum_{i=1}^{2} P(X = x_i) = P(X = x_1) + P(X = x_2)$

$$= P(X = 0) + P(X = 1)$$

$$= \frac{10}{12} + \frac{2}{12}$$

$$= 1$$

$\therefore$ دالة التوزيع الاحتمالي [$P(X= x_i)$] ، هي دالة كتلة إحتمالية (p.m.f.) .

2-2-3 : القيمة المتوقعة والتباين للمتغير العشوائي المنفصل :

The Expected Value & Variance for [DRV]

إذا كان لدينا متغير عشوائي منفصل وليكن (X) ، يأخذ القيم الآتية :

$X : x_1 , x_2 , x_3 , \ldots , x_n$

وإن قيم دالة التوزيع الاحتمالي المرافقة لقيم المتغير العشوائي (X) ، هي :

$P(X) : P(x_1) , P(x_2) , P(x_3) , \ldots , P(X_n)$

عليه تكون :

1- القيمة المتوقعة (التوقع الرياضي) للمتغير العشوائي (X) ، والذي يرمز له بالرمز {E(X)} ، أو الرمز (μ_x) ، يكتب بالشكل الآتي :

$$E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i * P(x_i)$$

$$= x_1 * P(x_1) + x_2 * P(x_2) + \ldots + x_n * P(x_n)$$

2- وان تباين المتغير العشوائي (X) ، والذي يرمز له بالرمز [σ_x^2] ، يكتب كالآتي:

$$\sigma_x^2 = E\left(X_i^2\right) - \left[E(X_i)\right]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 * P(x_i) - \mu_x^2$$

3- وان الانحراف المعياري للمتغير العشوائي (X) ، والذي يرمز له بالرمز [σ_x]، يكتب بالعلاقة الآتية :

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$$

مثال (4) :

جد قيمة التوقع الرياضي (μ_x) والتباين (σ_x^2) والانحراف المعياري (σ_x) ، للمتغير العشوائي المنفصل (X) الوارد بالمثال رقم (1) .

الحل :

من نتائج حل المثال رقم (1) ، حصلنا على قيم المتغير العشوائي المنفصل (X)، وقيم دالة التوزيع الاحتمالي [$P(X=x_i)$] المرافقة لقيم المتغير المذكور، كما هي موضحة بالجدول الآتي:

X	0	1	2
$P(X= x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$$(1)\ \therefore\ \mu_x = E(X)$$

$$= \sum_{i=1}^{3} x_i * P(X = x_i)$$

$$= 0*\left(\frac{1}{4}\right)+1*\left(\frac{1}{2}\right)+2*\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$=1$$

$$(2)\ \therefore \sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 * P(X = x_i) - \mu_x^2$$

$$= \left[(0)^2 *\left(\frac{1}{4}\right) + (1)^2 *\left(\frac{1}{2}\right) + (2)^2 *\left(\frac{1}{4}\right)\right] - (1)^2$$

$$= 1.5 - 1$$

$$= 0.5$$

$$(3)\ \therefore \sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$$

$$= \sqrt{0.5}$$

$$= 0.71$$

مثال (5) :

إذا كان لـديك المتغـير العشـوائي المنفصـل (X) ، الـوارد بالمثـال (2) والخـاص برمـي زهـرتي نـرد منتظمتين مرة واحدة في تجربة عشوائية.

المطلوب: جد ما يأتي :

1- التوقع الرياضي (μ_x) .
2- الانحراف المعياري (σ_x) .

الحل:

إن فضاء العينة (S) لتجربة رمي زهرتي نـرد منتظمتـين مـرة واحـدة، والـواردة بالمثـال رقـم(2)، موضح بالجدول الآتي:

1^{st}. dice / 2^{nd}. Dice	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

$n(S) = 36$

وبالرجوع الى فضاء العينة (S) الموضح بالجدول السابق، نحصل على قيم المتغير العشـوائي (X) ، وقيم التوزيع الاحتمالي $P(X= x_i)$ ، على النحو الآتي:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

(1) $\therefore \mu_x = E(X)$

$$= \sum_{i=1}^{11} x_i * P(X = xi)$$

$$= x_1 * P(X = x_1) + x_2 * P(X = x_2) \ldots. + x_{11} * P(X = x_{11})$$

$$= 2*\frac{1}{36} + 3*\frac{2}{36} + 4*\frac{3}{36} + \ldots. + 12*\frac{1}{36}$$

$$= 7$$

$$(2)\quad \therefore\ \sigma_x^2 = E(X^2) - [\,E(X)\,]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{11} x_i^2 * P(X = x_i) - (\mu_x)^2$$

$$= \left[x_1^2 * P(X = x_1) + x_2^2 * P(X = x_2) + ... + x_{11}^2 * P(X = x_{11})\right] - \mu_x^2$$

$$= \left[(2)^2 * \frac{1}{36} + (3)^2 * \frac{2}{36} + ... + (12)^2 * \frac{1}{36}\right] - (7)^2$$

$$= \left[\frac{4}{36} + \frac{18}{36} + ... + \frac{144}{36}\right] - 49$$

$$= \frac{1974}{36} - 49$$

$$= 54.833 - 49$$

$$= 5.833$$

$$\therefore \sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$$

$$= \sqrt{5.833}$$

$$= 2.42$$

مثال (6) :

إذا كان لديك المتغير العشوائي المنفصل (X) ، الوارد بالمثال رقم (3)، والخاص برمي عملة معدنية وزهرة نرد متجانستين مرة واحدة في تجربة عشوائية.

المطلوب: جد ما يأتي :

1- التوقع الرياضي (μ_x) .

2- التباين (σ_x^2) والانحراف المعياري (σ_x) .

الحل :

من نتائج حل المثال رقم (3) ، حصلنا على القيم الاحتمالية [$P(X = x_i)$] المرافقة لقيم المتغير العشوائي (X) ، والموضحة بالجدول الآتي:

X	0	1
$P(X = x_i)$	$\frac{10}{12}$	$\frac{2}{12}$

(1) $\therefore \mu_x = E(X)$

$$= \sum_{i=1}^{2} x_i * P(X = x_i)$$

$$= x_1 * P(X = x_1) + x_2 * P(X = x_2)$$

$$= 0 * \frac{10}{12} + 1 * \frac{2}{12}$$

$$= \frac{2}{12}$$

$$= \frac{1}{6}$$

(2) $\therefore \sigma_x^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$

$$= \sum_{i=1}^{2} X_i^2 * P(X = x_i) - (\mu_x)^2$$

$$= \left[x_1^2 * P(X = x_1) + x_2^2 * P(X = x_2)\right] - \mu_x^2$$

$$= \left[(0)^2 * \frac{10}{12} + (1)^2 * \frac{2}{12}\right] - \left(\frac{1}{6}\right)^2$$

$$= \frac{2}{12} - \frac{1}{36}$$

$$= \frac{5}{36}$$

$$\therefore \sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$$

$$= \sqrt{\frac{5}{36}}$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{6}$$

$$= 0.373$$

مثال (7) :

لتكن الدالة التالية، هي دالة كتلة احتمالية (p.m.f) :

$$P(X=x_i) = \begin{cases} \frac{C}{x_i^2} & , \quad x_i = 1,2,4 \\ 0 & , \quad o/w \end{cases}$$

المطلوب: جد ما يأتي :

1- قيمة الثابت (C) .

2- القيمة المتوقعة (μ_x) .

الحل:

1- بما إن الدالة [$P(X=x_i)$ هي دالة كتلة احتمالية (p.m.f) بمعنى إن الخاصيتين متحققتين، اي إن :

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} P(X=x_i) = 1$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{3} \frac{C}{X_i^2} = 1$$

$$\frac{C}{X_1^2} + \frac{C}{X_2^2} + \frac{C}{X_3^2} = 1$$

$$\frac{C}{1} + \frac{C}{4} + \frac{C}{16} = 1$$

$$\therefore C = \frac{16}{21}$$

$$\therefore P(X=x_i) = \begin{cases} \frac{16}{21X_i^2} & , \quad X_i = 1,2,4 \\ 0 & , \quad o/w \end{cases}$$

2- إن القيمة المتوقعة (μ_x) للمتغير العشوائي المنفصل (X) ، هي :

$$\mu_x = \sum_{i=1}^{3} X_i * P(X = x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{3} X_i * \frac{16}{21X_i^2}$$

$$= \frac{16}{21}\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{X_i}$$

$$= \frac{16}{21}\left[\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right]$$

$$= \frac{4}{3}$$

3-3 المتغير العشوائي المتصل: Continuous Random Variable

هو المتغير الذي يكون المجال المقابل له غير قابل للعد، أي إن قيم المتغـير العشـوائي (X) ، تأخذ الشكل الآتي:

$$X \in [a , b] \subset R$$

ومن امثلة هذا النوع من المتغيرات ، ما يأتي :

1- اطوال مجموعة من الطلبة.
2- كمية الامطار الساقطة على مدينة جرش في شهر كانون الثاني.
3- درجات الحرارة في مدينة بغداد لشهر تموز.
4- اعمار الازواج في مجموعة من الاسر.
5- الدخل الشهري لمجموعة من الاسر.
6- اسعار سلعة معينة.
7- اوزان عدد من اعضاء هيئة التدريس.

1-3-3 التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتصل :

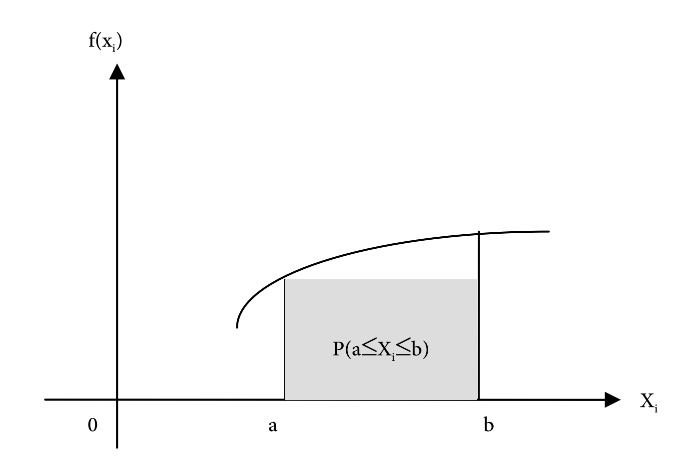
Probability Distribution for [CRV]

إن التوزيع الاحتمالي لهذا النوع من المتغيرات لا يمكن تمثيله على غرار حالـة المتغـير العشوائي المنفصل، بل يُعبر عن التوزيع الاحـتمالي للمتغـير العشـوائي المتصـل بدالـة احـتمال مستمرة، تدعى بدالة الكثافة الاحتمالية (Probability Density Function-p.d.f) وتتصف هذه الدالة بالخاصيتين الآتيتين:

1- $f(x_i) \geq 0 \quad , \quad [\ \forall\ x_i \quad , \quad a \leq x_i \leq b\ ]$

2- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x_i) = 1$

ولايجـاد الاحـتمال الواقـع ضـمن المجـال [a , b] نقـوم بحسـاب المسـاحة تحـت المنحنى، والتي تسمى $P\ [\ a \leq X_i \leq b\ ]$ ، والموضحة بالشكل البياني الآتي:



إذ إن :

$$P\ (a \leq x_i \leq b) = \int_a^b f(x_i)dx$$

مثال (8) : لديك الدالة الآتية :

$$f(x_i) = \begin{cases} 3x^2 & , \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & , \quad o/w \end{cases}$$

المطلوب: جد ما يأتي:

1- اثبت إن الدالة $f(x_i)$ تمثل دالة كثافة احتمالية (p.d.f) .

2- قيمة الاحتمال $P\left(0 \le x_i \le \frac{1}{2}\right)$.

الحل :

1- لاثبات ان الدالة [$f(x_i)$] هي دالة كثافة احتمالية (p.d.f) ينبغـي أن تتحقـق الخاصـيتين الآتيتين:

a- $\therefore\ f(x_i) \ge 0 \quad , \quad [\ \forall\ x_i \quad , \quad a \le x_i \le b\ ]$

b- $$\therefore \int_0^1 f(x_i)dx = \int_0^1 3x^2 dx$$

$$= x^3 \Big|_0^1$$

$$= 1^3 - 0^3$$

$$= 1$$

$\therefore$ الدالة $f(x_i)$ تمثل دالة كثافة احتمالية (p.d.f) .

2- قيمة الاحتمال $P\left(0 \le x_i \le \frac{1}{2}\right)$ ، يكون كالآتي:

$$P\left(0 \le x_i \le \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x_i)dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} 3x_i^2 dx$$

$$= x^3 \Big|_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 0^3 = \frac{1}{8}$$

مثال (9) :

لديك دالة الكثافة الاحتمالية (p.d.f) الآتية :

$$f(x_i) = \begin{cases} \frac{x}{2} & , \quad 0 \le x \le 2 \\ 0 & , \quad o/w \end{cases}$$

المطلوب: جد ما يأتي :

1- رسم دالة الكثافة الاحتمالية (p.d.f) .

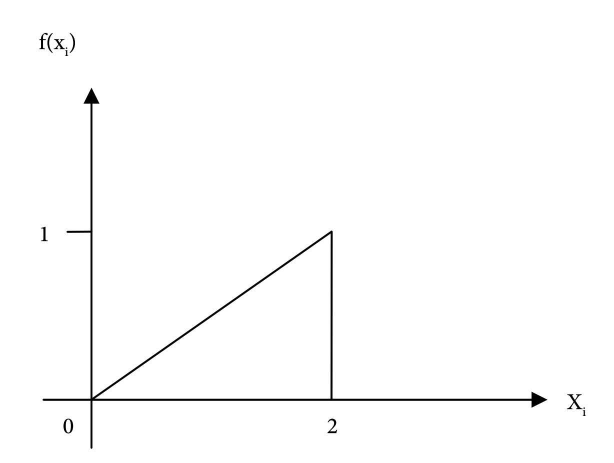
2- قيمة الاحتمال $P(X \geq 1)$.

3- قيمة الاحتمال $P(X<1)$.

الحل:

1- يمكن رسم دالة الكثافة الاحتمالية (p.d.f) ، على النحو الآتي:

x_i	$f(x_i)$
0	0
2	1



2- ايجاد قيمة الاحتمال $P(X \geq 1)$:

$$P(x \geq 1) = \int_1^2 f(x_i)dx$$
$$= \int_1^2 \frac{x}{2}dx$$
$$= \left.\frac{x^2}{4}\right|_1^2$$
$$= 1 - \frac{1}{4}$$
$$= \frac{3}{4}$$

3- ايجاد قيمة الاحتمال $P(X<1)$:

$$P(x < 1) = \int_0^1 \frac{x}{2}dx$$
$$= \left.\frac{x^2}{4}\right|_0^1$$
$$= \frac{1}{4} - 0$$
$$= \frac{1}{4}$$

2-3-3 : القيمة المتوقعة والتباين للمتغير العشوائي المتصل :

The Expected Value & Variance for (CRV)

اذا كان لدينا متغير عشوائي متصل وليكن (x) ، وله دالة كثافة احتمالية (p.d.f.) ولتكن $[f(x_i)]$ ، فان :

1- التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المتصل (x) ، يكتب كالآتي:

$$E(X) = \mu_x = \int_{-\infty}^{\infty} x * f(x_i)dx$$

2- وإن التباين للمتغير العشوائي (X) ، يكتب بالصيغة الآتية :

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 * f(x_i)dx - \mu_x^2$$

مثال (10) : لديك دالة الكثافة الاحتمالية (p.d.f.) الآتية :

$$f(x_i) = \begin{cases} 3x^2 & , \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & , \quad o/w \end{cases}$$

المطلوب: احسب ما يأتي:

1- التوقع الرياضي (μ_x) .
2- قيمة التباين (σ_x^2) .

Solution :

1- $\mu_x = E(X)$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x * f(x_i)dx$$

$$= \int_{0}^{1} x * (3x^2)dx$$

$$= \int_{0}^{1} 3x^3 dx$$

$$= \left. \frac{3x^4}{4} \right|_0^1$$

$$= \frac{3}{4} - 0$$

$$= \frac{3}{4}$$

$$2-\quad \sigma_x^2 = \int_0^1 x^2 * f(x_i)dx - \mu_x^2$$

$$= \int_0^1 x^2 * (3x^2)dx - \mu_x^2$$

$$= \int_0^1 3x^4 dx - \mu_x^2$$

$$= \left.\frac{3x^5}{5}\right|_0^1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$= \left(\frac{3}{5} - 0\right) - \frac{9}{16}$$

$$= \frac{3}{5} - \frac{9}{16}$$

$$= \frac{3}{80}$$

مثال (11) :

لديك دالة الكثافة الاحتمالية (p.d.f) الآتية:

$$f(x_i) = \begin{cases} \frac{A}{x^2} & , \quad 1 \le x_i \le 4 \\ 0 & , \quad o/w \end{cases}$$

المطلوب: جد ما يأتي:

1- قيمة الثابت (A) .

2- رسم دالة الكثافة الاحتمالية (p.d.f) .

3- قيمة الاحتمال $P(1 \le x \le 3)$

4- الانحراف المعياري (σ_x) .

Hint :

$$\int \frac{dx}{x} = Lnx$$

الحل:

1- بما إن الدالة $f(x_i)$ هي دالة كثافة احتمالية (p.d.f.) ، بمعنى إن الخاصيتين متحققتين، أي إن :

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} f(x_i)dx = 1$$

$$\therefore \int_{1}^{4} \frac{A}{x^2}dx = 1$$

$$A\int_{1}^{4} \frac{1}{x^2}dx = 1$$

$$A\int_{1}^{4} x^{-2}dx = 1$$

$$A\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right|_1^4 = 1$$

$$A\left[-\frac{1}{x}\right|_1^4 = 1$$

$$A\left[-\frac{1}{4}+1\right] = 1$$

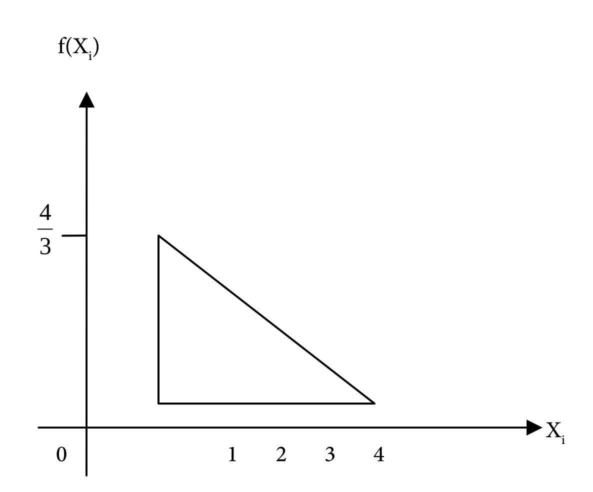
$$A\left(\frac{3}{4}\right) = 1$$

$$\therefore A = \frac{4}{3}$$

$$\therefore f(x_i) = \begin{cases} \dfrac{4}{3x^2} & , \quad 1 \le x_i \le 4 \\ 0 & , \quad o/w \end{cases}$$

2- رسم دالة الكثافة الاحتمالية (p.d.f) :

x_i	$f(x_i)$
1	$\frac{4}{3}$
4	$\frac{1}{12}$



3- ايجاد قيمة الاحتمال $P(1\leq x \leq 3)$:

$$\therefore\ P(1 \leq x \leq 3) = \int_1^3 f(x_i)dx$$

$$= \int_1^3 \frac{4}{3x^2}dx$$

$$= \frac{4}{3}\int_1^3 \frac{1}{x^2}dx$$

$$= \frac{4}{3}\int_1^3 x^{-2}dx$$

$$= \frac{4}{3}\left[-\frac{1}{x}\right|_1^3$$

$$P\ (1 \leq x \leq 3) = \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{3}+1\right)$$

$$= \frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{8}{9}$$

4- ايجاد قيمة الانحراف المعياري (σ_x) :

لغرض ايجاد قيمة الانحراف المعياري (σ_x) لابد من ايجاد (μ_x ، σ_x^2) أولاً، وعلى النحو الآتي:

$$\therefore\ \mu_x = E(X)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x * f(x_i)dx$$

$$= \int_{1}^{4} x * \frac{4}{3x^2}dx$$

$$= \frac{4}{3}\int_{1}^{4} \frac{1}{x}dx$$

$$= \frac{4}{3}\left[Lnx\right|_1^4$$

$$= \frac{4}{3}\left[Ln4 - Ln1\right] \qquad , \qquad Ln1 = 0$$

$$= \frac{4}{3}Ln4$$

$$= \frac{4}{3}\ (1.3863)$$

$$= 1.8484$$

$$\sigma_x^2 = E(x^2) - [E(x)]^2$$

$$= \int_1^4 x^2 * f(x_i)dx - (\mu_x)^2$$

$$= \int_1^4 x^2 * \frac{4}{3x^2} dx - \mu_x^2$$

$$= \frac{4}{3}\int_1^4 dx - \mu_x^2$$

$$= \frac{4}{3}\left[x\Big|_1^4 - (1.8484)^2\right.$$

$$= \frac{4}{3} \ (4 - 1) - 3.417$$

$$= \frac{4}{3} \ (3) - 3.417$$

$$= 4 - 3.417$$

$$= 0.583$$

$$\therefore \sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$$

$$= \sqrt{0.583}$$

$$= 0.764$$

مثال (12) :

لديك دالة الكثافة الاحتمالية (p.d.f) الآتية :

$$f(x_i) = \begin{cases} \frac{x}{2} & , \quad 0 \le x_i \le 2 \\ 0 & , \qquad o/w \end{cases}$$

المطلوب: احسب ما يأتي :

1- التوقع الرياضي (μ_x) .
2- قيمة التباين (σ_x^2) .

Solution :

1- $\mu_x = E(X)$

$$= \int_0^2 x * f(x_i)dx$$

$$= \int_0^2 x * \left(\frac{x}{2}\right)dx$$

$$= \int_0^2 \frac{x^2}{2}dx$$

$$= \left.\frac{x^3}{6}\right|_0^2$$

$$= \frac{8}{6} - 0$$

$$= \frac{4}{3}$$

2- $$\sigma_x^2 = \int_0^2 x^2 * f(x_i)dx - \mu_x^2$$

$$= \int_0^2 x^2 * \left(\frac{x}{2}\right)dx - \mu_x^2$$

$$= \int_0^2 \frac{x^3}{2}dx - \mu_x^2$$

$$= \left.\frac{x^4}{8}\right|_0^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

$$\sigma_x^2 = \left[\frac{16}{8} - 0\right] - \frac{16}{9}$$

$$= 2 - \frac{16}{9}$$

$$= \frac{2}{9}$$

3- $\therefore \sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$

$$= \sqrt{\frac{2}{9}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$= \frac{1.414}{3}$$

$$\approx 0.471$$

أسئلة عامة حول الفصل الثالث

س1 : عند رمي قطعة نقود متجانسة ثلاث مرات متتالية في تجربة عشوائية.

المطلوب :

1- عرف المتغير العشوائي (X) بانه عدد مرات ظهور الصورة (H) .
2- ايجاد دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (X) .
3- اثبت بان دالة التوزيع الاحتمالي، هي دالة كتلة احتمالية (p.m.f) .

س2 : لتكن الدالة التالية، هي دالة كتلة احتمالية (p.m.f) :

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{x}{C} & , \quad x = 1,2,3,4 \\ 0 & , \quad o/w \end{cases}$$

المطلوب: جد ما يأتي :

1- قيمة الثابت (C) .
2- التوقع الرياضي {E(X)} والتباين (σ_x^2)
3- رسم دالة التوزيع الاحتمالي P(X=x) .

س3 : لتكن الدالة التالية، هي دالة كثافة احتمالية (p.d.f) :

$$f(x) = \begin{cases} Kx & , \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & , \quad o/w \end{cases}$$

المطلوب: جد ما يأتي :

1- قيمة الثابت (K) .
2- التوقع الرياضي {E(X)} والتباين (σ_x^2) .
3- قيمة الاحتمال $\left[P\left(0 \le x \le \frac{1}{2} \right) \right]$.

س4 : لتكن الدالة التالية، هي دالة كثافة احتمالية (p.d.f) :

$$f(x) = \begin{cases} Cx^2 & , \quad 0 \le x \le 3 \\ 0 & , \quad o/w \end{cases}$$

المطلوب: جد ما يأتي :

1- قيمة الثابت (C) .
2- قيمة الاحتمال $[P(1 \le x \le 2)]$.

س5 : لديك دالة التوزيع الاحتمالي الآتية :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}.e^{-\frac{x}{2}} & , \quad x \ge 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

المطلوب:

1- إثبت إن دالة التوزيع الاحتمالي اعلاه، هي دالة كثافة احتمالية (p.d.f) .
2- إحسب قيمة الاحتمال $[P(1 \le x \le 3)]$.

س6 : لديك دالة التوزيع الاحتمالي الآتية :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{9}x & , \quad 0 \le x \le 3 \\ 0 & , \quad o/w \end{cases}$$

المطلوب:

1- إثبت إن الدالة اعلاه، هي دالة كثافة احتمالية (p.d.f) .
2- إحسب قيمة التباين (σ_x^2) والانحراف المعياري (σ_x) .

س7 : لديك الدالة التالية، هي دالة كثافة احتمالية (p.d.f) :

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-3X} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

المطلوب: جد ما يأتي :

1- قيمة الثابت (k) .
2- التوقع الرياضي {E(X)} والتباين (σ_x^2) .
3- قيمة الاحتمالات الآتية :

a- $P(x < 3)$.

b- $P(x \geq 2)$.

c- $P(1 \leq x \leq 2)$.

س8 : لديك دالة الكثافة الاحتمالية (p.d.f) الآتية :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-X} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

المطلوب: جد ما يأتي :

1- القيمة المتوقعة (μ_x) .
2- قيمة الانحراف المعياري (σ_x) .
3- قيمة الاحتمال [$P(2 \leq x \leq 4)$] .

الفصل الرابع
التوزيعات الاحتمالية
Probability Distributions

4-1 مقدمة :

تطرقنا في الفصل السابق الى مفهوم المتغيرات العشوائية وانواعها، وسينصب الاهتمام في هذا الفصل على عدد من التوزيعات الاحتمالية الشائعة الاستخدام في التطبيقات الاحصائية بنوعيها (المنفصلة، والمتصلة)، والتي تهم متخذي القرار كل حسب تخصصه في ظل حالات عدم التأكد، مما يجعلهم يبحثون عن التوزيع الاحتمالي الذي ينسجم مع طبيعة البيانات المعتمدة في اتخاذ قراراتهم بشأن المشكلة المدروسة.

4-2 التوزيعات الاحتمالية المتقطعة (المنفصلة):

Discrete Probability Distributions

إن المتغيرات العشوائية المنفصلة لها تطبيقات متعددة في الحياة العملية، وقد اسُتخدم لهذا النوع من المتغيرات عدد من التوزيعات الاحتمالية التي تساهم في معالجة هذه التطبيقات، وتكون هذه التوزيعات على عدة أنواع، نذكر منها ما يأتي:

1- توزيع برنوللي — Bernoulli Distribution
2- توزيع ذي الحدين — Binomail Distribution
3- توزيع بواسون — Poisson Distribution
4- التوزيع الهندسي — Geometric Distribution
5- التوزيع فوق الهندسي — Hypergeometric Distribution
6- التوزيع المنتظم المنفصل — Discrete Uniform Distribution

وفيما يلي شرحاً مفصلاً لكل توزيع من التوزيعات الاحتمالية المتقطعة (المنفصلة) الآنفة الذكر.

1-2-4 توزيع برنولي : Bernoulli Distribution

سُمي هذا التوزيع باسم مكتشفه "جيمس برنـوللي" في نهايـة القـرن السـابع عشرـ ويُعد توزيع برنوللي أو ما يسمى احيانا بمحاولات برنوللي (Bernoulli Trails)، الأساس لبناء توزيع ذي الحدين (Binomail Distribution) الذي سيأتي ذكره في الفقرة التالية مباشرة.

وتُعرف تجربة برنوللي بانها تجربة تكون نتيجتها اما "نجاحا" وتحدث باحتمال (P)، أو "فشلاً" وتحدث باحتمال (1-P) .

إن المتغير العشوائي (X) لتجربة برنوللي، يأخذ قيمتين فقط، هما (0 ، 1) القيمة (1) تمثل حالة (النجاح)، اما القيمة (صفر) تمثل حالة (الفشل)، ويكتب التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (X) ، على النحو الآتي:

$$P(X= x) = \begin{cases} P^{X}(1-P)^{1-x} & , \quad x = 0,1 \\ 0 & , \quad o/w \end{cases}$$

إن الوسط الحسابي (μ_x) والتباين (σ_x^2) والانحـراف المعيـاري ((σ_x)) لتوزيـع برنـوللي، هي كالآتي:

1- $\mu_x = P$

2- $\sigma_x^2 = pq \quad , \quad q = 1 - p$

3- $\sigma_x = \sqrt{pq}$

خصائص توزيع برنوللي:

إن أي تجربة احصائية، تحقق الشروط التالية، تسمى تجربة برنوللي :

1- لكل محاولة من المحاولات نتيجتين فقط ، هما "نجاح" أو "فشل".
2- إن نتيجة كل محاولة مستقلة عن نتيجة المحاولات الاخرى.
3- إن احتمال "النجاح" ثابت لجميع المحاولات، وليكن (P) ، لذا فان احتمال "الفشـل" سيكون هو الآخر ثابت وهو (1-P) .

إن دالة التوزيع الاحتمالي لتجربة برنوللي تدعى بدالة الكتلـة الاحتماليـة (p.m.f) كونهـا تتميز بالخصائص الآتية :

إنها دالة وحيدة القيمة، بمعنى إن كل قيمة من القيم المعرفة للمتغير (X) هناك قيمة واحدة فقط للدالة P(X=x) .

1- إنها دالة موجبة، وتتراوح قيمتها بين الصفر والواحد، أي إن [0<P(X=x)<1].
2- إن مجموع القيم الاحتمالية [P(X=x)] المقابلة لقيم المتغير (X) يساوي الواحد الصحيح، أي إن :

$$\sum_{x=0}^{1} P^{x}(1-P)^{1-x} = 1$$

مثال (1) :

عند رمي قطعة نقود متجانسة مرة واحدة في تجربة عشوائية، وكان المتغير العشوائي (X) يمثل ظهور الصورة (H) .

المطلوب:

1- أكتب دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير (X) مع رسم الدالة.
2- إحسب الوسط الحسابي (μ_x) والتباين (σ_x^2) والانحراف المعياري (σ_x) للتوزيع.

Solution :

$$1- \quad \therefore P(X=x) = \begin{cases} P^{x}(1-P)^{1-x} & , \quad x = 0,1 \\ 0 & , \quad o/w \end{cases}$$

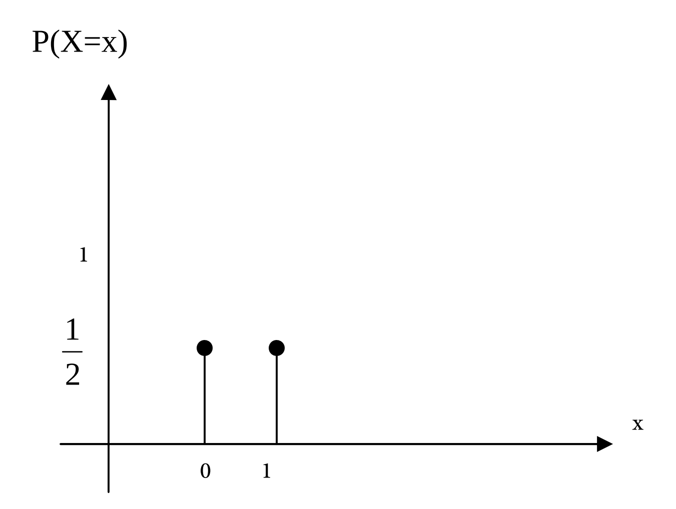
$$\because \; S = \{ H , T \} \quad , \quad n(S) = 2$$

$$\therefore \; P(H) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore P(X=x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x} & , \quad x = 0,1 \\ 0 & , \quad o/w \end{cases}$$

ولرسم دالة التوزيع الاحتمالي اعلاه، نعمل الجدول الآتي:

x	0	1
P(X=x)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$



2- (a) $\because \mu_x = P$

$\therefore \mu_x = \frac{1}{2}$

(b) $\therefore \sigma_x^2 = pq$, $q = 1 - p$

$= \frac{1}{2} * \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{4}$

(c) $\therefore \sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$

$= \sqrt{\frac{1}{4}}$

$= \frac{1}{2}$

2-2-4 توزيع ذي الحدين : Binomial Distribution

تكون النتائج الممكنة لكثير من الظواهر في الحياة العملية واحدة من نتيجتين، أحد هذه النتائج يسمى "نجاحا" وتحدث باحتمال (P) ، اما النتيجة الثانية تسمى "فشلا" وتحدث باحتمال (1-P) ، وهذا النوع من التجارب يطلق عليها بتجربة برنوللي.

وعند تكرار تجربة برنوللي عدداً ثابتاً من المحاولات المستقلة وليكن (n)، فاننا في هذه الحالة نحصل في كل مرة اما على حالة "نجاح" باحتمال (P) او حالة "فشل" باحتمال (1-P) .

عليه فان المتغير العشوائي (X) الذي يمثل عدد مرات "النجاح" لهذا النوع من التجارب، يقال بانه يتوزع وفق توزيع ذي الحدين، إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي له، تأخذ الشكل الآتي:

$$P(X=x) = \begin{cases} C_x^n P^x (1-P)^{n-x} & , \quad x = 0,1,2,\dots,n \\ 0 & , \quad o/w \end{cases}$$

إن دالة التوزيع الاحتمالي لتوزيع ذي الحدين، هي عبارة عن الحد العام لمفكوك ثنائي الحدين $[(p+q)^n]$ ، مما يجعل توزيع ذي الحدين من بين عائلة توزيعات ثنائية الحدين، ومن هنا جاءت تسمية هذا التوزيع بتوزيع ثنائي الحدين او توزيع ذي الحدين، ويطلق على كل من (n) و (p) بمعلمات التوزيع (Parameters) .

وغالباً ما يعبر عن توزيع ذي الحدين إختصاراً بالاصطلاح الآتي :

$X \sim b\ (n\ ,\ P)$

وهذا يعني بان المتغير العشوائي (X) يتوزع وفق توزيع ذي الحدين بالمعلمتين (n) و (P) .

إن الوسط الحسابي (μ_x) والتباين (σ_x^2) والانحراف المعياري (σ_x) ، لتوزيع ذي الحدين، هي على النحو الآتي:

1- $\mu_x = np$

2- $\sigma_x^2 = npq \qquad , \quad q = 1 - p$

3- $\sigma_x = \sqrt{npq}$

خصائص توزيع ذي الحدين :

إن أي تجربة إحصائية تحقق الشروط التالية، تسمى توزيع ذي الحدين:

1- لكل محاولة من المحاولات نتيجتين فقط، هما "نجاح" او "فشل".
2- إن نتيجة كل محاولة مستقلة عن نتيجة المحاولات الاخرى في التجربة.
3- إن احتمال النجاح ثابت لجميع المحاولات وليكن (P) ، لذا فان احتمال الفشل سيكون هو الآخر ثابت وهو (1-P) .
4- تتضمن تجربة ذي الحدين على عدد من المحاولات وليكن (n) ، وإن (n) عبارة عن حجم العينة.

استخدامات تجربة ذي الحدين :

1- طبيعة الانتاج (معيب أو جيد).
2- نتيجة رمي عملة معدنية (صورة أو كتابة).
3- إسقاط طائرة أو عدم إسقاطها.
4- إصابة هدف معين أو عدم إصابته.
5- نتيجة مبارة في كرة السلة (خسارة أو فوز).
6- التدخين لمجموعة من الطلاب أو عدم التدخين.
7- نتيجة الامتحان النهائي لمادة معينة (رسوب أو نجاح).

وفيما يلي بعض الامثلة التطبيقية على بعض التجارب الآنفة الذكر:

مثال (2) :

عند رمي قطعة نقود معدنية متجانسة (5) مرات، وكان المتغير العشوائي (X) يمثل عدد الصور (Heads) التي تظهر.

المطلوب:

1- اكتب التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (X) .
2- جد احتمال ظهور (4) صور.
3- إحسب قيمة الاحتمال $P(1 < X \leq 3)$.

Solution :

1- $\because P(H) = \frac{1}{2} \quad , \quad n = 5$

$$\therefore X \sim b\left(5, \frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore \; P(X=x) = \begin{cases} C_x^5 \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{5-x} & , \quad x = 0,1,2,3,4,5 \\ 0 & , \quad o/w \end{cases}$$

2- $P(x = 4) = C_4^5 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^1$

$$= \frac{5}{32}$$

3- $P(1 < x \leq 3) = P(X = 2) + P\;(X = 3)$

$$= C_2^5 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + C_3^5 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{10}{32} + \frac{10}{32}$$

$$= \frac{10}{16}$$

مثال (3) :

اذا كان احتمال تدمير دبابة (0.3) ، فاذا هجمت (5) دبابات، وكان المتغير العشـوائي (X) يمثل عدد الدبابات المدمرة .

المطلوب:

1- اكتب التوزيع الاحتمالي للمتغير (X) .
2- جد احتمال تدمير (4) دبابات على الاقل.
3- جد احتمال تدمير دبابة واحدة على الاكثر.

Solution :

1- $\because$ P = 0.3 , n = 5

$\therefore$ X ~ b (5 , 0.3)

$$\therefore P(X=x) = \begin{cases} C_x^5 (0.3)^x (0.7)^{5-x} & , \quad x = 0,1,2,3,4,5 \\ 0 & , \quad o/w \end{cases}$$

2- $P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5)$

$$= C_4^5 (0.3)^4 (0.7)^1 + C_5^5 (0.3)^5 (0.7)^0$$

= 0.02835 + 0.00243

= 0.03078

3- $P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$

$$= C_0^5 (0.3)^0 (0.7)^5 + C_1^5 (0.3)^1 (0.7)^4$$

= 0.16807 + 0.36015

= 0.52822

مثال (4) :

اذا كان (20%) من انتاج معمل الالبسة الرجالية الجاهزة معيب، وان المتغير العشوائي (X) يمثل عدد البدلات المعيبة، وتم سحب عينة مكونة من (7) بدلات.

المطلوب:

1- اكتب التوزيع الاحتمالي للمتغير (X) .
2- جد احتمال ان يكون من بين البدلات المسحوبة (3) معيبة.

Solution :

1- $\because P = \frac{20}{100} = 0.2$, n = 7

$\therefore$ X ~ b (7 , 0.2)

$$\therefore P(X=x) = \begin{cases} C_x^7 (0.2)^x (0.8)^{7-x} & , \quad x = 0,1,2,....,7 \\ 0 & , \quad o/w \end{cases}$$

2- P(X= 3) = $C_3^7 (0.2)^3 (0.8)^4$

= 35 (0.008) (0.4096)

= 0.1147

مثال (5) :

افترض بانه يوجد من بين كل (100) طائرة من انتاج شركة معينة لانتاج الطائرات (10) طائرات غير صالحة للاستخدام، سحبت عينة مكونة من (6) طائرات، وكان المتغير العشوائي (X) يمثل عدد الطائرات غير الصالحة.

المطلوب:

1- اكتب التوزيع الاحتمالي للمتغير (X) .
2- جد احتمال ان يكون من بين الطائرات المسحوبة (3) طائرات غير صالحة.
3- جد (μ_x ، σ_x^2 ، σ_x) .

Solution :

1- $\because P = \dfrac{10}{100} = 0.1$, n = 6

$\therefore$ X ~ b (6 , 0.1)

$$\therefore P(X = x) = \begin{cases} C_x^6 (0.1)^x (0.9)^{6-x} & , \quad x = 0,1,\ldots,6 \\ 0 & , \quad o/w \end{cases}$$

2- P(X =3) = $C_3^6 (0.1)^3 (0.9)^3$

= 0.01458

3- μ_x = np

= 6(0.1)

= 0.6

σ_x^2 = npq

= 6(0.1)(0.9)

= 0.54

$\therefore \sigma_x = \sqrt{0.54}$

$= 0.73$

مثال (6) :

اذا كـان المتغـير العشـوائي (X) يتبـع توزيـع ذي الحـدين بوسـط حسـابي (μ_x=1) وتبـاين $\left(\sigma_x^2 = 0.7\right)$.

المطلوب: احسب قيمة الاحتمال $P(X \geq 1)$.

Solution :

$\because\ \mu_x = np$

$\therefore\ np = 1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$

$\because\ \sigma_x^2 = npq$

$\therefore\ 0.7 = (1).q$

$\therefore\ q = 0.7$

$\because\ p + q = 1$

$\therefore\ p = 1 - q$

$= 1 - 0.7$

$= 0.3 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$

نعوض نتيجة العلاقة (2) في العلاقة (1) نحصل على :

$n\,(0.3) = 1$

$\therefore\ n = 3.33$

≈ 3

$\therefore\ X \sim b\,(\,3\,,\,0.3\,)$

$\therefore\ P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1)$

$= 1 - P\,(X = 0)$

$= 1 - C_0^3 (0.3)^0 (0.7)^3$

$= 1 - 0.343$

$= 0.657$

مثال (7): إذا كان المتغير العشوائي (X) يتوزع وفق توزيع ذي الحدين، أي إن:

$X \sim b\,(3\ ,\ 0.4)$

المطلوب:

1- اكتب التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (X) .

2- إحسب الوسط الحسابي (μ_x) والتباين (σ_x^2) للتوزيع.

3- جد قيمة الاحتمالات الآتية :

a- $P\,(X < 2)$

b- $P\,(X \geq 2)$

Solution :

1- $\because\ X \sim b\,(3\ ,\ 0.4)$

$\therefore n = 3\ ,\ P = 0.4\ ,\ q = 0.6$

$$\therefore\ P(X = x) = \begin{cases} C_x^3(0.4)^x(0.6)^{3-x} & ,\quad x = 0,1,2,3 \\ 0 & ,\quad o/w \end{cases}$$

2- $\therefore\ \mu_x = np$

$= 3(0.4)$

$= 1.2$

$\therefore\ \sigma_x^2\ = npq$

$= 3(0.4)\ (0.6)$

$= 0.72$

3- a) $P(X < 2) = P(X = 0) + P(X\ = 1)$

$= C_0^3(0.4)^0(0.6)^3 + C_1^3(0.4)^1(0.6)^2$

$= 0.216 + 0.432$

$= 0.648$

b) $P(X \geq 2) = 1 - P\,(X < 2)$

$= 1 - 0.648$

$= 0.352$

3-2-4 : توزيع بواسون : Poission Distribution

سُمي هـذا التوزيـع باسـم مكتشـفه "سـايمون بواسـون" (Simeon Poisson) عـام (1837) ولتوزيع بواسون اهمية كبيرة في التطبيقـات الاحصـائية المتعـددة، إذ يسـتخدم عـلى نطاق واسع في المجالات الادارية وفي بحوث العمليات كونه يُعد الاساس في بناء نماذج نظريـة صفوف الانتظار، ويطلق احياناً على هذا التوزيع تسمية "توزيـع الحـوادث النـادرة الوقـوع" كونه يتعامل مع كثير من الحالات التطبيقية التي تتصف بان احـتمال نجـاح المحاولـة يكـون صغير جداً، أي إن ($P \rightarrow 0$) ، بحيث تكـون قيمـة ($q = 1 - P$) مسـاوية تقريبـاً الى الواحـد الصحيح، مما يجعل وقوع الحدث نادر جداً، مثال ذلك، عدد المرضى المصـابين بسرطان الـدم في بلد ما، وحوادث سقوط الطائرات.

وبافتراض لدينا متغير عشوائي منفصل وليكن (X) ، يمثـل عـدد محـاولات النجـاح في فترة زمنية معينة كأن تكون (ثانية، دقيقة، ساعة، يوم، اسبوع... الخ) ، ففي هذه الحالة يقال بان المتغير العشوائي (X) يتوزع وفق توزيع بواسـون، إذا كانـت دالـة التوزيـع الاحـتمالي لـه، تأخذ الشكل الآتي:

$$P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}.\lambda^{x}}{x!} & , \quad x = 0,1,2,\ldots,\infty \\ 0 & , \quad o/w \end{cases}$$

إذ إن :

e : تمثل اساس اللوغاريتم الطبيعي، وقيمتها مساوية الى (2.71828) .

λ : تمثل معلمة توزيع بواسون، وتكون موجبة دائما ($\lambda > 0$) .

x! : تمثل مضروب (مفكوك) العدد (x) .

ويمكن ايجاد قيمة المقدار ($e^{-\lambda}$) ، بعد معرفة قيمة المعلمة (λ) ، من جداول خاصة وضعت لهذا الغرض.

وغالباً ما يعبر عن توزيع بواسون، اختصاراً بالاصطلاح الآتي:

$$X \sim P(\lambda)$$

وهذا يعني بان المتغير العشوائي (X) يتوزع وفق توزيع بواسون بالمعلمة (λ).

إن الوسط الحسابي (μ_x) والتباين (σ_x^2) والانحراف المعيـاري (σ_x) لتوزيـع بواسـون، تكتـب على النحو الآتي:

1- $\mu_x = \lambda$

2- $\sigma_x^2 = \lambda$

3- $\sigma_x = \sqrt{\lambda}$

استخدامات توزيع بواسون :

فيما يلي بعض الامثلة الشائعة حول تجارب بواسون، نذكر منها ما يأتي:

1- عدد الزبائن الذين يدخلون الى احد البنوك خلال (10) دقائق.
2- عدد الركاب الذين يصلون الى مجمع الباصات خلال (5) دقائق.
3- عدد الاخطاء المطبعية التي يتم اكتشافها في صفحة من صفحات كتاب معين.
4- عدد المكالمات الهاتفية المستلمة خلال ساعة واحدة.
5- عدد الحوادث المرورية التي تحدث على الطرق الخارجية خلال يوم واحد.

وفيما يلي عدد من الامثلة التطبيقية، على بعض التجارب الآنفة الذكر:

مثال (8) :

اذا كان متوسط عدد الحوادث المرورية اليومية التي تحدث عـلى الطـرق الخارجيـة هو حادث واحد.

المطلوب:

1- اكتب دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (X) .
2- ما هو احتمال أن يحدث (حادثان) في يوم ما؟

Solution :

نفرض المتغير العشوائي (X) يمثل عدد الحوادث المرورية اليومية، عليه فان:

1- $\because \lambda = 1$

$\therefore X \sim P(1)$

$$\therefore P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-1}.1^x}{x!} & , \quad x = 0,1,2,\ldots,\infty \\ 0 & , \quad o/w \end{cases}$$

2- $P(X = 2) = \dfrac{e^{-1}.1^2}{2!} \qquad , \qquad 2! = 2$

$$= \frac{e^{-1}}{2}$$

من الجداول الخاصة المرفقة بالملاحق، نحصل على ($e^{-1} = 0.368$) ، عليه فان:

$$\therefore \; P(X = 2) = \frac{0.368}{2}$$
$$= 0.184$$

مثال (9) :

يستلم أحد البنوك شيكات بدون رصيد بمعدل (6) شيكات في اليوم الواحد.

المطلوب:

1- اكتب دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (X) .

2- ما هو احتمال أن يستلم المصرف (3) شيكات بدون رصيد في يوم ما؟

3- ما هو احتمال أن يستلم المصرف في يوم ما، شيك واحد على الاقل بدون رصيد؟

Solution :

نفرض المتغير العشوائي (X) يمثل عدد الشيكات المستلمة بدون رصيد في اليوم، عليه فان:

1- $\because \; \lambda = 6$

$\therefore \; X \sim P\,(6)$

$$\therefore \; P\,(X = x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-6}.6^{x}}{x!} & , \quad x = 0,1,2,\ldots,\infty \\ 0 & , \quad o/w \end{cases}$$

2- $P(X = 3) = \dfrac{e^{-6}.6^{3}}{3!} \qquad , \quad 3! = 6$

$$= \frac{216 \;\; e^{-6}}{6}$$
$$= 36 \;\; e^{-6}$$

من الجداول الخاصة، نحصل على ($e^{-6} = 0.002$) ، عليه فان:

$\therefore\ P(X=3) = 36\ (0.002)$

$= 0.072$

3- $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1)$

$= 1 - P(X = 0)$

$= 1 - \dfrac{e^{-6}.6^{0}}{0!} \qquad , \quad 0! = 1$

$= 1 - e^{-6}$

$= 1 - 0.002$

$= 0.998$

مثال (10) :

لديك المتغير العشوائي (X) يتوزع وفق توزيع بواسون [X ~ P(2)] .

المطلوب:

1- اكتب دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (X) .

2- جد الوسط الحسابي (μ_x) والتباين (σ_x^2) والانحراف المعياري (σ_x) .

3- إحسب قيمة الاحتمالات الآتية :

a- $P(X = 2)$ b- $P(X > 1)$ c- $P(X < 2)$

Solution :

1- $\because\ X \sim P(2)$

$\therefore \lambda = 2$

$$\therefore\ P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-2}.2^{x}}{x!} & , \quad x = 0,1,2,\ldots,\infty \\ 0 & , \quad o/w \end{cases}$$

2- $\because\ \mu_x = \lambda$

$= 2$

$\therefore\ \sigma_x^2 = \lambda$

$= 2$

$$\sigma_x = \sqrt{\lambda}$$

$$= \sqrt{2}$$

$$= 1.414$$

3- a) $P(X = 2) = \dfrac{e^{-2}.2^2}{2!}$

$$= 2\ e^{-2}$$

من الجداول الخاصة، نحصل على $(e^{-2} = 0.135)$ ، عليه فان :

$$\therefore\ P(X = 2) = 2\ (0.135)$$

$$= 0.27$$

b) $P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1)$

$$= 1 - [\ P(X = 0) + P\ (X = 1)\ ]$$

$$= 1 - \left[\frac{e^{-2}.2^0}{0!} + \frac{e^{-2}.2^1}{1!}\right]$$

$$= 1 - [\ e^{-2} + 2\ e^{-2}\ ]$$

$$= 1 - [\ 0.135 + 2(0.135)\ ]$$

$$= 1 - [\ 0.135 + 0.27\ ]$$

$$= 1 - 0.405$$

$$= 0.595$$

c) $P(X < 2) = P\ (X = 0) + P\ (X = 1)$

$$= e^{-2} + 2e^{-2}$$

$$= 0.135 + 2(0.135)$$

$$= 0.135 + 0.27$$

$$= 0.405$$

4-2-4 : العلاقة بين توزيع ذي الحدين وتوزيع بواسون :

يُعد توزيع بواسون، حالة خاصة من توزيع ذي الحدين، ومشتق منه، عندما يكون احتمال نجاح المحاولة (P) صغير جداً (يقترب من الصفر) $(P\rightarrow 0)$ ، وإن عدد المحاولات (n) كبير جداً (يقترب من المالانهاية) $(n\rightarrow\infty)$ ، عليه فان:

$$\lim_{\substack{P\rightarrow 0 \\ n\rightarrow\infty}} (np) = \lambda$$

مما يجعل حساب الاحتمالات باستخدام توزيع ذي الحدين في الحالة المذكورة اعلاه، شاقاً ومضنياً، الا انه بالامكان من حساب الاحتمالات بواسطة توزيع بواسون، عندما تكون $(P\rightarrow 0)$ وإن $(n\rightarrow\infty)$ ، بما يجعل قيمة $(\lambda=np)$ معتدلة القيمة.

مثال (11) :

لوحظ إن احتمال اصابة الشخص باحد الامراض المعدية في منطقة معينة كان (0.003)، قامت احدى الفرق الطبية باجراء فحص طبي لعينة عشوائية قوامها (1000) شخص، يتوقع انهم يعانون من الاصابة بهذا المرض.

المطلوب:

1- اكتب دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (X) .
2- إحسب قيمة الاحتمالات الآتية:

a- $P(X = 4)$ b- $P(X \leq 2)$ c- $P(1 \leq X \leq 2)$

Solution :

بما إن إحتمال نجاح المحاولة (P) صغير جداً، وإن عدد المحاولات (n) كبير جداً، عليه فان:

1) $\lambda = np$

$= 1000\ (0.003)$

$= 3$

$$\therefore\ P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-3}.3^{x}}{x!} & , \quad x = 0,1,2,\ldots,\infty \\ 0 & , \quad o/w \end{cases}$$

2- a) $P(X = 4) = \dfrac{e^{-3}.3^{4}}{4!}$, $4! = 24$

$$= \frac{81e^{-3}}{24}$$

من الجداول الخاصة، نحصل على ($e^{-3} = 0.05$) ، عليه فان :

$$\therefore\ P(X = 4) = \frac{81}{24}\ (0.05)$$

$$= 0.169$$

b) $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$$= \frac{e^{-3}.3^{0}}{0!} + \frac{e^{-3}.3^{1}}{1!} + \frac{e^{-3}.3^{2}}{2!}$$

$$= e^{-3} + 3e^{-3} + \frac{9}{2}e^{-3}$$

$$= \left(1 + 3 + \frac{9}{2}\right)e^{-3}$$

$$= \frac{17}{2}e^{-3}$$

$$= \frac{17}{2}(0.05)$$

$$= 0.425$$

c) $P(1 \leq X \leq 2) = P(X \leq 2) - P(X < 1)$

$$= [\ P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)\ ] - P(X = 0)$$

$$= P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$\therefore\ P\,(1 \le x \le 2\,) = \frac{e^{-3}.3^{1}}{1!} + \frac{e^{-3}.3^{2}}{2!}$$

$$= 3e^{-3} + \frac{9}{2}e^{-3}$$

$$= \left(3 + \frac{9}{2}\right)e^{-3}$$

$$= \frac{15}{2}e^{-3}$$

$$= \frac{15}{2}\ (0.05)$$

$$= 0.375$$

5-2-4 : التوزيع الهندسي : Geometric Distribution

تُعد تجارب التوزيع الهندسي مشـابهة إلى حـد كبـير لتجـارب توزيـع برنـوللي، التـي تفترض بان نتيجة كل تجربة اما نجاح المحاولة باحتمال (P) أو فشـلها بـاحتمال (1-P)، كـما وإن عدد المحاولات في تجارب التوزيع الهندسي لم تكن محددة من البداية كما هـو الحـال في تجارب توزيع ذي الحدين، وعلى هذا الأسـاس فـان المتغـير العشـوائي المنفصـل (X) في حالـة تجارب التوزيع الهندسي، هو عبارة عن عدد محاولات اجراء التجربة دون توقـف حتـى يـتم الحصول على اول نجاح، وبذلك فان اول نجاح سيتم الحصـول عليـه بالمحاولـة (X) ، تسـبقه عدد من المحاولات الفاشلة وقدرها (X-1) .

وبافتراض لدينا متغير عشوائي منفصـل ولـيكن (X) ، يمثـل عـدد المحـاولات اللازمـة للحصول على اول نجاح، ففي هذه الحالة يقال بان المتغير العشوائي (X) يتوزع وفق التوزيع الهندسي، إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي له، تأخذ الشكل الآتي:

$$P(X = x) = \begin{cases} P(1-P)^{x-1} & , \quad x = 1,2,3,....,\infty \\ 0 & , \quad o/w \end{cases}$$

وغالبا ما يعبر عن التوزيع الهندسي، إختصاراً بالاصطلاح الآتي:

$X \sim g\ (P)$

وهذا يعني بان المتغير العشوائي (X) يتوزع وفق التوزيع الهندسي بالمعلمة (P) .

إن الوسط الحسابي (μ_x) والتباين (σ_x^2) والانحراف المعياري (σ_x) للتوزيع الهندسي، تكتب على النحو الآتي:

1- $\mu_x = \frac{1}{p}$

2- $\sigma_x^2 = \frac{q}{p^2}$, $q = 1 - p$

3- $\sigma_x = \frac{\sqrt{q}}{p}$

وفيما يلي بعض الامثلة التطبيقية، التي توضح آلية استخدام التوزيع الهندسي:

مثال (12) :

رميت زهرة نرد متجانسة في تجربة عشوائية، حتى يتم الحصول على أحد الاوجه.

المطلوب:

1- اكتب دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير (X) .
2- ما هو احتمال أن تحتاج إلى (4) محاولات على الأقل، حتى تحصل على العدد (5) على وجه زهرة النرد؟
3- كم هو معدل عدد المحاولات التي تحتاجها؟

Solution :

بما إن احتمال الحصول على احد الاوجه الستة في الرمية الواحدة يساوي $\left(\frac{1}{6}\right)$، عليه فان:

$$P = \frac{1}{6}$$

$$1)\ \therefore\ P(X = x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{6}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)^{x-1} & , \quad x = 1,2,3,\ldots,\infty \\ 0 & , \quad o/w \end{cases}$$

2) $P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4)$

$$= 1 - [P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)]$$

$$= 1 - \left[\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^0 + \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^1 + \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^2\right]$$

$$= 1 - \left[\frac{1}{6} + \frac{5}{36} + \frac{25}{216}\right]$$

$$= 1 - \frac{91}{216}$$

$$= 1 - 0.421$$

$$= 0.579$$

3) $\therefore \mu_x = \dfrac{1}{P}$

$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{6}\right)}$$

$= 6$ Trials

مثال (13) :

مصنع إنتاجي يحتوي على عدد من الخطوط الانتاجية، وكان إحتمال توقف أحد هذه الخطوط عن العمل لمدة يوم واحد يساوي (0.1) .

المطلوب:

1- ما هو احتمال أن يتوقف الخط الانتاجي عن العمل (3) أيام؟
2- ما هو احتمال أن يتوقف الخط الانتاجي عن العمل (3) أيام على الأكثر؟
3- جد الوسط الحسابي (μ_x) والتباين (σ_x^2) .

Solution :

1) $\because P = 0.1 \quad \Rightarrow \quad \therefore 1 - P = 0.9$

$$\therefore P(X = x) = \begin{cases} 0.1(0.9)^{x-1} & , \quad x = 1,2,3,\ldots,\infty \\ 0 & , \quad o/w \end{cases}$$

$$\therefore\ P(X = 3) = 0.1\ (0.9)^2$$
$$= 0.081$$

$$2)\ P(X \leq 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$
$$= 0.1\ (0.9)^0 + 0.1\ (0.9)^1 + 0.1\ (0.9)^2$$
$$= 0.1 + 0.09 + 0.081$$
$$= 0.271$$

$$3\text{- a)}\ \mu_x = \frac{1}{P}$$
$$= \frac{1}{0.1}$$
$$= 10$$

$$\text{b)}\ \sigma_x^2 = \frac{q}{P^2} \qquad , \quad q = 1 - P$$
$$= \frac{0.9}{(0.1)^2}$$
$$= 90$$

6-2-4 : التوزيع فوق الهندسي: Hypergeometric Distribution

تُعد تجارب التوزيع فوق الهندسي من التجارب المتكررة غير المستقلة، وإن هذا النوع من التجارب مبني على اساس مفهوم السحب بدون إرجاع، مما يجعل إحتمال الحصول على صفة معينة غير ثابت، أي ان الاحتمال يتغير من محاولة إلى أخرى، على عكس تجارب توزيع برنوللي وتوزيع ذي الحدين التي يكون فيها الاحتمال ثابت من محاولة إلى اخرى كونهما من التجارب المستقلة، وإن السحب بموجبهما يتم بارجاع.

فعلى سبيل المثال، لو كان لدينا مجتمع يحتوى على (N) من العناصر، فيه (N_1) لنوع معين من العناصر نسميها (نجاحاً)، اما المتبقي منه هو $(N\text{-}N_1)$ لنوع آخر من العناصر نسميها (فشلاً)، وتم اختيار عينة عشوائية بحجم (n) منه بدون إرجاع، فان عدد

حالات النجاح التي يمكن الحصول عليها هي (N_1) ، وإن عدد حالات الفشـل هـي $(N\text{-}N_1)$ عليه فان :

عدد طرق إختيار (x) من (N_1) هو $\left[C_x^{N_1}\right]$ ويعبر عنه $\binom{N_1}{x}$.

وعدد طرق إختيار $(n\text{-}x)$ من $(N\text{-}N_1)$ هو $\left[C_{n-x}^{N-N_1}\right]$ ويعبر عنه $\binom{N-N_1}{n-x}$.

وبالتالي فان :

عـدد الطـرق الممكنـة لاختيـار (x) و $(n\text{-}x)$ مـن (N_1) و $(N\text{-}N_1)$ عـلى الترتيـب هـو $\binom{N_1}{x}\binom{N-N_1}{n-x}$.

وعدد الطرق الكلية لاختيار (n) من (N) هو $\left[C_n^N\right]$ ويعبر عنه $\binom{N}{n}$.

وبافتراض لدينا متغير عشوائي منفصل وليكن (X)، يمثـل عـدد حـالات النجـاح التـي يمكن الحصول عليها من تجربة التوزيع فوق الهندسي، ففـي هـذه الحالـة يقـال بـان المتغـير العشوائي (X) يتوزع وفق التوزيع فوق الهندسي، إذا كانت دالة التوزيع الاحـتمالي لـه، تأخـذ الشكل الآتي:

$$P(X=x)=\begin{cases}\dfrac{\binom{N_1}{x}\binom{N-N_1}{n-x}}{\binom{N}{n}} & , \quad x=0,1,2,\ldots.n\\[2ex] 0 & , \quad o/w\end{cases}$$

وغالباً ما يُعبر عن التوزيع فوق الهندسي، إختصاراً بالاصطلاح الآتي:

$X \sim h\,(N_1\,,\,N-N_1)$

وهذا يعني بان المتغير العشوائي (X) يتوزع وفق التوزيع فوق الهنـدسي بـالمعلمتين (N_1) و $(N\text{-}N_1)$.

إن الوسط الحسابي (μ_x) والتباين (σ_x^2) والانحراف المعياري (σ_x) ، للتوزيـع فـوق الهندسي، تكتب على النحو الآتي:

$$1-\ \mu_x = n * \frac{N_1}{N}$$

$$2-\ \sigma_x^2 = n * \frac{N_1}{N}\left(1-\frac{N_1}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

$$3-\ \sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$$

إذ إن :

$\frac{N-n}{N-1}$: يمثل معامل التصحيح (خاص بالمجتمعات المحدودة).

وفيما يلي بعض الأمثلة التطبيقية، حول التوزيع فوق الهندسي:

مثال (14) :

يتوفر في احد معارض بيع الاجهـزة الكهربائيـة (15) مكـوى بخـاري، مـن بينهـا (3) ثلاثة أجهزة فيها عطل (معيبة)، قام احد الوكلاء بشراء (6) ستة مكواة دون فحصها.

المطلوب:

1- اكتب دالة التوزيع الاحتمالي، للمتغير العشوائي (X) الذي يمثل عدد الاجهزة العاطلة (المعيبة).

2- ما هو احتمال أن يكون من ضمن ما أشتراه الوكيل (2) مكواة فيها عطل؟

Solution :

1) $\because\ N = 15 \quad , \quad N_1 = 3 \quad , \quad N - N_1 = 12 \quad , \quad n = 6$

$$\therefore P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{3}{x}\binom{12}{6-x}}{\binom{15}{6}} & , \quad x = 0,1,2,3,4,5,6 \\ 0 & , \quad o/w \end{cases}$$

$$2)\ P(X=2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{12}{4}}{\binom{15}{6}}$$

$$= \frac{3(495)}{5005}$$

$$= 0.297$$

مثال (15) :

كيس يحتوي على (6) حبات تفاح، و (9) حبات برتقال، اختيرت منه (7) حبات دون إرجاع.

المطلوب:

1- ما هو احتمال أن يكون من بين الحبات المختارة (3) حبات تفاح؟

2- جد الوسط الحسابي (μ_x) والتباين (σ_x^2) .

Solution :

1) $\because$ $N = 15$, $N_1 = 6$, $N\text{-}N_1 = 9$, $n = 7$

$$\therefore P(X=x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{6}{x}\binom{9}{7-x}}{\binom{15}{7}} & , \quad x = 0,1,2,....,7 \\ 0 & , \quad o/w \end{cases}$$

$$\therefore P(X=3) = \frac{\binom{6}{3}\binom{9}{4}}{\binom{15}{7}}$$

$$= \frac{20(126)}{6435}$$

$$\approx 0.392$$

$$2\text{- a)}\quad \mu_x = n * \frac{N_1}{N}$$
$$= 7 * \frac{6}{15}$$
$$= 2.8$$

$$\text{b)}\quad \sigma_x^2 = n * \frac{N_1}{N}\left(1 - \frac{N_1}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$
$$= 7 * \frac{6}{15}\left(1 - \frac{6}{15}\right)\left(\frac{15-7}{15-1}\right)$$
$$= 2.8\ (0.6)\ (0.57)$$
$$= 0.958$$

$$\text{c)}\quad \therefore \sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$$
$$= \sqrt{0.958}$$
$$= 0.979$$

7-2-4 التوزيع المنتظم المنفصل : Discrete Uniform Distribution

يستخدم التوزيع المنتظم المنفصل في حالة التطبيقات الاحصائية الخاصة بـالمتغيرات العشوائية التي تأخذ عدداً محدداً من القيم باحتمالات متساوية، بمعنـى إن كـل وحـدة مـن وحدات التجربة العشوائية لها نفس الفرصة بالظهور، ويطلق على هـذا النـوع مـن التجـارب "بالتجارب العشوائية المتجانسة"، ومن الأمثلة التطبيقية عن هذا النـوع مـن التجـارب مـثلاً: "تجربة رمي زهرة نـرد متجانسـة مـرة واحـدة"، أو "تجربـة سـحب جامعـة اهليـة مـن بـين مجموعة من الجامعات الأهلية الاردنية عددها (n) " .

وبافتراض لدينا متغير عشوائي منفصل وليكن (X) ، يأخـذ عـدداً محـدداً مـن القـيم المنفصلة هي [x_1 ، x_2 ، .... x_n] ، ففي هذه الحالة يقـال بـان المتغـير العشـوائي (X) يتـوزع وفق التوزيع المنتظم المنفصل، إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي له، تأخذ الشكل الآتي:

$$P(X=x)=\begin{cases}\frac{1}{n} & , \quad x=1,2,3,\ldots,n \\ \\ 0 & , \quad\quad o/w\end{cases}$$

حيث إن :

n : تمثل عدد الوحدات الداخلة في التجربة، وإن (n > 0) .

إن الوسط الحسابي (μ_x) والتباين (σ_x^2) والانحراف المعياري (σ_x) ، للتوزيع المنتظم المنفصل، تكتب على النحو الآتي:

$$1\text{-}\ \mu_x=\frac{n+1}{2}$$

$$2\text{-}\ \sigma_x^2=\frac{n^2-1}{12}$$

$$3\text{-}\ \sigma_x=\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$$

والمثال التالي، يوضح آلية تطبيق التوزيع المنتظم المنفصل، لواحدة من التجارب العشوائية المتجانسة :

مثال (16) :

في تجربة عشوائية، يراد سحب كلية من بين الكليات التابعة إلى جامعة جرش والبالغ عددها (5) كليات، بهدف اجراء دراسة حول تقييم الاداء العلمي للكلية .

المطلوب:

1- اكتب دالة التوزيع الاحتمالي، للمتغير العشوائي (X) الذي يمثل الكلية الظاهرة على ورقة السحب.
2- ارسم دالة التوزيع الاحتمالي P (X = x) .
3- جد قيمة الوسط الحسابي (μ_x) والتباين (σ_x^2) .

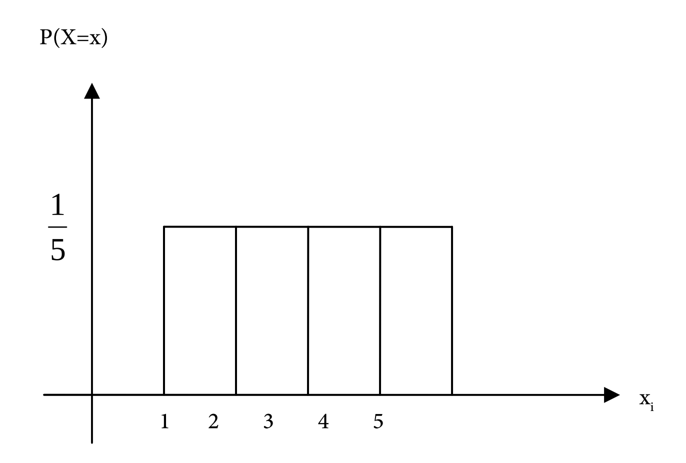
Solution :

$$1)\ \because\ P(X=x)=\begin{cases}\frac{1}{n} & , \quad x=1,2,3,\ldots,n \\ \\ 0 & , \quad\quad o/w\end{cases}$$

$$\therefore\ P(X=x)=\begin{cases}\frac{1}{5} & , \quad x=1,2,3,4,5 \\ 0 & , \quad o/w\end{cases}$$

2) لرسم دالة التوزيع الاحتمالي P(X= x) ، نعمل الجدول الآتي :

x	1	2	3	4	5
P(X=x)	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$



3- a) $\mu_x=\frac{n+1}{2}$

$=\frac{5+1}{2}$

$=3$

b) $\sigma_x^2=\frac{n^2-1}{12}$

$=\frac{25-1}{12}$

$=2$

3-4 التوزيعات الاحتمالية المستمرة (المتصلة):
Continuous Probability Distributions

تُعد التوزيعات الاحتمالية ذات اهمية كبيرة على مستوى استخدامها في المجالات الادارية والاقتصادية والاجتماعية والتربوية من الناحيتين النظرية والتطبيقية، إذ يتم من خلال هذه التوزيعات، تحديد شكل دالة التوزيع الاحتمالي ونوعها، واحتساب الاحتمالات التي يحتاجها الباحث في الحياة العملية، وتكون المتغيرات العشوائية لهذا النوع من التوزيعات متمثلة بجميع القيم في فترة ما ولتكن $(a \leq x \leq b)$ ، مما يجعل عدم امكانية عد هذه القيم وانما يتم قياسها بشكل تقريبي، مثال ذلك: اطوال الطلبة أو اوزانهم، اجور العمال، اسعار السلع...الخ.

وتكون التوزيعات الاحتمالية المتصلة على عدة انواع، نذكر منها ما يأتي:

1- التوزيع الطبيعي Normal Distribution

2- التوزيع الطبيعي المعياري Standard Normal Distribution

3- التوزيع المنتظم Uniform Distribution

4- توزيع گاما Gamma Distribution

5- التوزيع الأسي Exponential Distribution

6- توزيع بيتا Beta Distribution

وفيما يلي شرحاً مفصلاً لكل توزيع من التوزيعات الاحتمالية المتصلة، الآنفة الذكر:

1-3-4 التوزيع الطبيعي : Normal Distribution

يعود الفضل باكتشاف هذا التوزيع الى العالم الرياضي الانكليزي "دي مويفر" (De-Moivre) عام (1733) ، وكان اول من استخدم التوزيع الطبيعي في دراسة الاخطاء المحتملة في القياس، كل من العالمين الرياضيين "لابلاس" (Laplace) ، و "كاوس" (Gauss) عام (1809) .

ويُعد التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية المتصلة من الناحيتين النظرية والتطبيقية، إذ إنه يستخدم على نطاق واسع في وصف عدد كبير من الظواهر

الطبيعية، منها على سبيل المثال لا الحصر، وصف متغيرات الاوزان والاطوال، قياس مستوى الذكاء، ضبط جودة الانتاج.. الخ .

وبافتراض لدينا متغير عشوائي متصل وليكن (X) ، يتوزع وفق التوزيع الطبيعي، بوسط حسابي (μ) وتباين (σ^2) ، فان دالة التوزيع الاحتمالي له، تأخذ الشكل الآتي:

$$f(X) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} . e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2} & , \quad -\infty < X < \infty \\ 0 & , \quad o/w \end{cases}$$

حيث إن :

μ , σ^2 : تمثل معلمات التوزيع الطبيعي، وإن [$-\infty<\mu<\infty$, $\sigma^2 > 0$] .

π : تمثل النسبة التقريبية الثابتة، إذ إن [$\pi = 3.14159$] .

وغالباً ما يعبر عن التوزيع الطبيعي، إختصاراً بالاصطلاح الآتي:

$$X \sim N(\mu , \sigma^2)$$

وهـذا يعنـي إن المتغـير العشـوائي المتصـل (X) ، يتـوزع وفـق التوزيـع الطبيعـي بالمعلمتين (μ) و (σ^2) .

إن الوسـط الحسـابي (μ_x) والتبـاين (σ_x^2) والانحـراف المعيـاري (σ_x) للتوزيـع الطبيعي، تكتب على النحو الآتي:

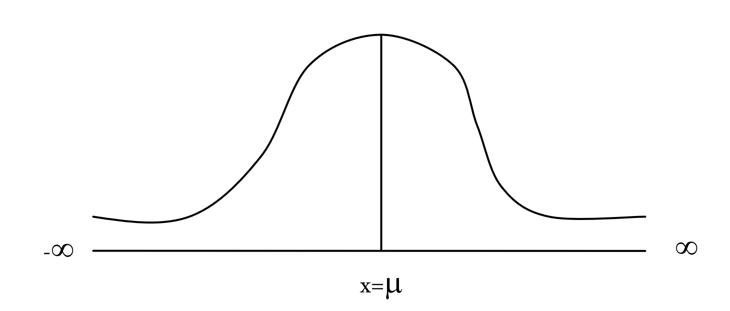
1- $\mu_x = \mu$

2- $\sigma_x^2 = \sigma^2$

3- $\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$

ويتصف التوزيع الطبيعي بالخصائص الآتية :

1- إن منحنى دالة الكثافة الاحتمالية [f(x)] للتوزيع الطبيعي يشبه شكل الناقوس (الجـرس) (Bell Shape) ، ويكون متماثلاً حول المحـور الـرأسي المـار بالنقطـة ($x=\mu$)، والشـكل التـالي يوضح ذلك :



2- يتقارب طرفا منحنى دالة الكثافة الاحتمالية [f(X)] من الصفر، أي إن :

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = \text{Zero}$$

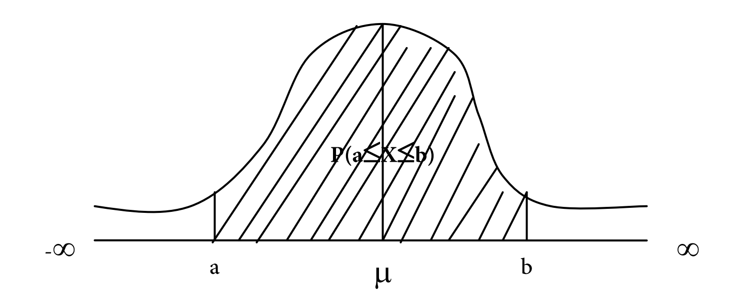
3- إن المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي تساوي الواحد صحيح، أي إن :

$$P(-\infty < x < \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$
$$= 1$$

إذ يمكن حساب المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي بين النقطتـين [b , a] مـثلاً، على النحو الآتي:

$$P(a \le x \le b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$
$$= P(x \le b) - P(x \le a)$$

والشكل التالي، يوضح المساحة تحت المنحنى بين النقطتين [b , a] :

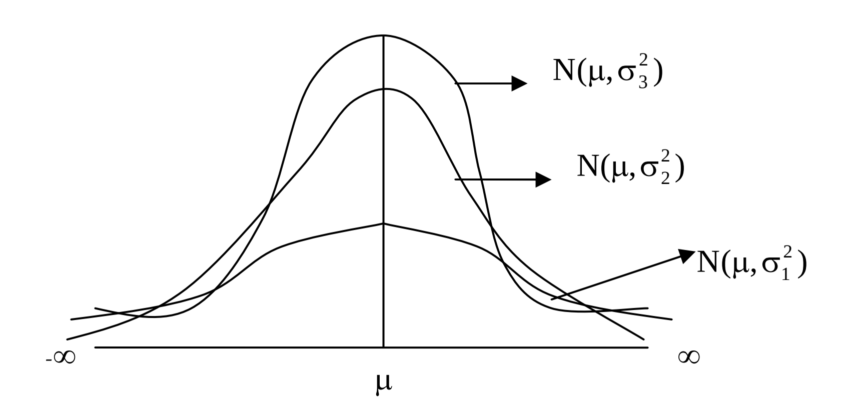


4- إن الوسط الحسابي (Mean) والوسيط (Median) والمنوال (Mode) للتوزيع الطبيعي متساوية دائماً، أي إن :

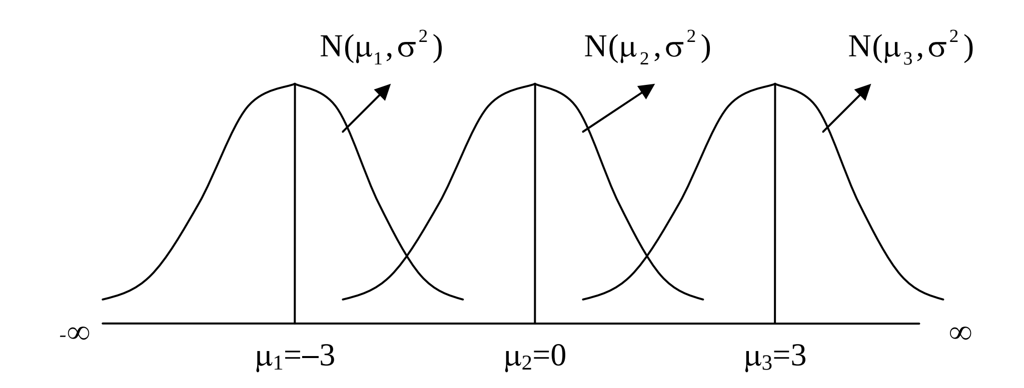
Mean $(\overline{x})$ = Median (Me) = Mode (Mo)

5- يتحدد شكل منحنى دالة التوزيع الطبيعي من خلال الوسط الحسابي (μ) والتباين (σ^2) وعلى النحو الآتي:

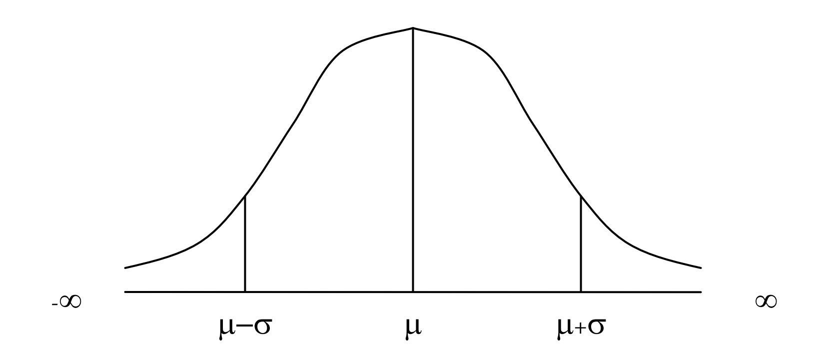
أ-عند ثبات قيمة الوسط الحسابي (μ) ، وتغير قيمة التباين (σ^2) نحو الصغر أو الكبر، فان ذلك يحدد درجة تفلطح منحنى الدالة، كما موضح بالشكل الآتي:



ب- عند تغير قيمة الوسط الحسابي (μ) ، وثبات قيمة التباين (σ^2)، فان ذلـك لا يـؤثر عـلى شكل منحنى الدالة، كما موضح بالشكل الآتي:



6- تمتلك دالة الكثافة الاحتمالية [f(x)] للتوزيع الطبيعي، نقطتي إنقلاب عند النقطتين [$x = \mu - \sigma$, $x = \mu + \sigma$] ، والشكل التالي يوضح ذلك :



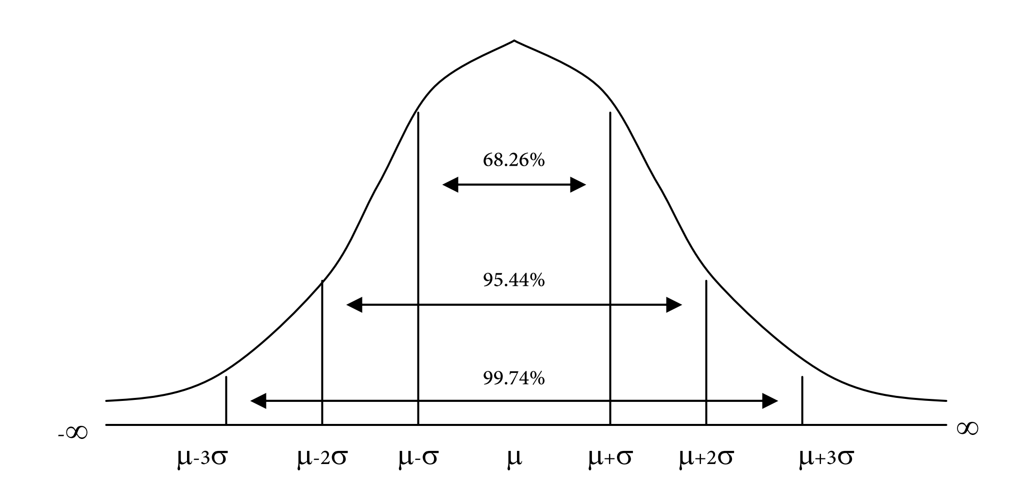
وتأسيساً على ما تقدم، تكون قيم الاحتمالات التالية مساوية الى الآتي:

a) $P(\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma) = 0.6826$

b) $P(\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma) = 0.9544$

a) $P(\mu - 3\sigma \leq x \leq \mu + 3\sigma) = 0.9974$

والشكل التالي يوضح ذلك :



وسيتم لاحقاً توضيح بعض الأمثلة التطبيقية حول استخدامات التوزيع الطبيعي، بعد الانتهاء من شرح وتطبيق التوزيع الطبيعي المعياري (Standard Normal Distribution) ، في الفقرة اللاحقة.

2-3-4 : التوزيع الطبيعي المعياري :

إذا كان لدينا المتغير العشوائي المتصل (X) ، يتوزع وفق التوزيع الطبيعي، بوسط حسابي (μ) وتباين (σ^2) ، أي إن :

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

فان المتغير العشوائي (Z) ، يمكن الحصول عليه من خلال اجراء التحويل الآتي:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

عليه فان المتغير العشوائي (Z) ، يتوزع وفق التوزيـع الطبيعـي المعيـاري، ولـه دالـة كثافة احتمالية (p.d.f) تعطى بالشكل الآتي:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} . e^{-\frac{Z^2}{2}} & , \quad -\infty < Z < \infty \\ 0 & , \quad o/w \end{cases}$$

وغالباً ما يُعبر عن التوزيع الطبيعي المعياري، إختصاراً بالاصطلاح الآتي:

$Z \sim N(0, 1)$

وهـذا يعنـي إن المتغـير العشـوائي (Z) ، يتـوزع وفـق التوزيـع الطبيعـي المعيـاري، بالمعلمتين (μ=0) و (σ^2=1) .

إن الوســط الحســابي (μ_z) والتبــاين (σ_z^2) والانحــراف المعيــاري (σ_z)، للتوزيــع الطبيعي المعياري، تكتب على النحو الآتي:

1- $\mu_z = 0$
2- $\sigma_z^2 = 1$
3- $\sigma_z = 1$

Note :

$$P(Z \leq z) = \varphi(z)$$

حيث إن :

$\varphi(z)$: تمثل قيمـة احتماليـة يـتم الحصـول عليهـا مـن الجـداول الخاصـة بـالتوزيع الطبيعي المعياري.

وفيما يلي بعض الأمثلة التطبيقية، التي توضح استخدامات التوزيع الطبيعي المعياري:

مثال (17) :

لديك المتغير العشوائي (Z) يتوزع وفق التوزيع الطبيعي المعياري، أي إن :

$Z \sim N(0, 1)$

المطلوب: إحسب قيمة الاحتمالات الآتية :

1- $P(Z < 2.58)$
2- $P(Z \geq 1.96)$
3- $P(0.68 \leq Z < 3)$

Solution :

1) $P(Z < 2.58) = \varphi\ (2.58)$

من الجداول الخاصة بالتوزيع الطبيعي المعياري، نحصل على $[\varphi(2.58) = 0.9951]$ ، عليه فان :

$\therefore\ P\ (\ Z < 2.58) = 0.9951$

2) $P\ (Z \geq 1.96) = 1 - P(Z < 1.96)$

$$= 1 - \varphi\ (1.96)$$

$$= 1 - 0.975$$

$$= 0.025$$

3) $P(0.68 \leq Z < 3\ ) = P\ (Z < 3) - P(Z < 0.68)$

$$= \varphi\ (3) - \varphi\ (0.68)$$

$$= 0.9987 - 0.7517$$

$$= 0.247$$

مثال (18) :

لديك المتغير العشوائي (Z) ، يتوزع وفق التوزيع الطبيعي المعياري، أي إن :

$Z \sim N\ (0\ ,\ 1)$

Note :

$\varphi\ (-1) = 1 - \varphi\ (1)$

المطلوب : احسب قيمة الاحتمالات الآتية :

1- $P\ (Z \geq -0.86)$
2- $P\ (-1.96 \leq Z \leq 1.96)$
3- $P\ (-3.2 < Z \leq -2.9)$

Solution :

1) $P(Z \geq -0.86) = 1 - P(Z < -0.86)$

$= 1 - \varphi(-0.86)$

$= 1 - [\, 1 - \varphi(0.86)\,]$

$= \varphi(0.86)$

$= 0.8051$

2) $P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = P(Z \leq 1.96) - P(Z < -1.96)$

$= \varphi(1.96) - \varphi(-1.96)$

$= \varphi(1.96) - [\, 1 - \varphi(1.96)\,]$

$= 2\,\varphi(1.96) - 1$

$= 2\,(0.975) - 1$

$= 1.95 - 1$

$= 0.95$

3) $P(-3.2 < Z \leq -2.93) = P(Z \leq -2.93) - P(Z \leq -3.2)$

$= \varphi(-2.93) - \varphi(-3.2)$

$= 1 - \varphi(2.93) - [\, 1 - \varphi(3.2)\,]$

$= \varphi(3.2) - \varphi(2.93)$

$= 0.9993 - 0.9983$

$= 0.001$

3-3-4 : اسلوب حساب قيمة الاحتمالات للمتغيرات العشوائية ذات التوزيع الطبيعي:

على افتراض لدينا المتغير العشوائي المتصل (X) ، يتوزع وفق التوزيـع الطبيعـي بمتوسـط (μ) وتبـاين (σ^2) ، أي إن :

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

فعند حساب قيم الاحتمالات لهذا النوع من التوزيعات، نقوم بتحويل المتغير العشوائي (X) إلى درجات معيارية (Z) ، وفقاً للصيغة الآتية :

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

فعلى سبيل المثال عند ايجاد قيمة الاحتمال التالي للمتغير العشوائي (X) بمتوسط (μ) وتباين (σ^2) ، فان :

$$P(X \leq 10) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{10-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(Z \leq \frac{10-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= \varphi\left(\frac{10-\mu}{\sigma}\right)$$

مثال (19) :

لديك المتغير العشوائي (X) ، يتوزع وفق التوزيع الطبيعي، أي إن :

$X \sim N(16, 9)$

المطلوب: إحسب قيمة الاحتمالات الآتية :

1- $P(X \geq 10)$
2- $P(X < 15)$

Solution :

1) $\because \mu = 16 \quad , \quad \sigma = \sqrt{9} = 3$

$\therefore P(X \geq 10) = 1 - P(X < 10)$

$$= 1 - P\left(\frac{X-16}{3} < \frac{10-16}{3}\right)$$

$= 1 - P(Z < -2)$

$= 1 - \varphi(-2)$

$= 1 - [1 - \varphi(2)]$

$= \varphi(2)$

$= 0.9772$

$$2)\quad P(X < 15) = P\left(\frac{X-16}{3} < \frac{15-16}{3}\right)$$

$$= P\left(Z < -\frac{1}{3}\right)$$

$$= P\,(Z < -0.33)$$

$$= \varphi\,(-0.33)$$

$$= 1 - \varphi\,(0.33)$$

$$= 1 - 0.6293$$

$$= 0.3707$$

مثال (20) :

اذا كانت درجات مجموعة مكونة من (400) طالب في مادة الاحصاء التطبيقي تتبع التوزيع الطبيعي (ND) بمتوسط (μ=65) وانحراف معياري (σ=5) ، أي إن :

$X \sim N\,(65\,,\,25)$

المطلوب: جد ما يأتي :

1- عدد الطلبة الحاصلين على (50) درجة فأقل.
2- عدد الطلبة الحاصلين على (80) درجة فأكثر.
3- عدد الطلبة الحاصلين بين (55 – 80) درجة.

Solution :

$$1)\quad \because \mu = 65 \qquad , \qquad \sigma = \sqrt{25} = 5$$

$$\therefore\ P\,(X \le 50) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{50-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(Z < \frac{50-65}{5}\right)$$

$$= P\,(Z < -3)$$

$$= \varphi\,(-3)$$

$$= 1 - \varphi\,(3)$$

$$= 1 - 0.9987$$

$$= 0.0013$$

∴ عدد الطلبة الحاصلين على (50) درجة فاقل، يكون :

$\therefore\ 400 * 0.0013 = 0.52$

≈ 1 student .

2) $P(X > 80) = 1 - P(X \leq 80)$

$$= 1 - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{80-65}{5}\right)$$

$= 1 - P(Z \leq 3)$

$= 1 - \varphi(3)$

$= 1 - 0.9987$

$= 0.0013$

∴ عدد الطلبة الحاصلين على اكثر من (80) درجة يكون :

$\therefore\ 400 * 0.0013 = 0.52$

≈ 1 student

3) $P(55 \leq X \leq 80) = P(X \leq 80) - P(X < 55)$

$$= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{80-65}{5}\right) - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{55-65}{5}\right)$$

$= P(Z \leq 3) - P(Z < -2)$

$= \varphi(3) - \varphi(-2)$

$= \varphi(3) - [1 - \varphi(2)]$

$= \varphi(3) - [1 - 0.9772]$

$= 0.9987 - 0.0228$

$= 0.9759$

∴ عدد الطلبة الحاصلين بين (55 – 80) درجة يكون:

$\therefore\ 400 * 0.9759 = 390$ student

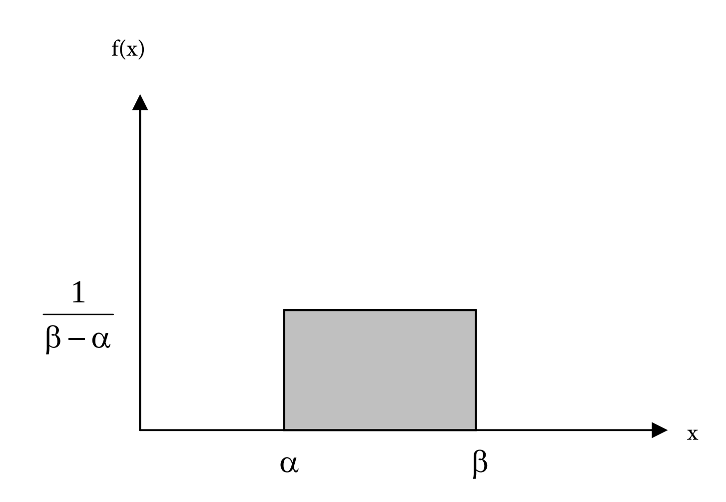
4-3-4 التوزيع المنتظم : Uniform Distribution

يُعد التوزيع المنتظم من التوزيعـات الاحتماليـة المتصـلة المهمـة جـداً لكثـير مـن التطبيقـات في الواقع العملي، إذ يستخدم لحساب الاحتمالات المناسبة لهذه التطبيقات، مثال ذلك: دراسة احتمال وصـول البواخر الى المواني لتفريغ حمولتها واوقات مغادرتها، ووصول الشاحنات الى محطات التفريغ.

وبافتراض لدينا متغير عشوائي متصل وليكن (X) ، يتوزع وفق التوزيع المنتظم بالمعلمتين (α) و (β) ، فان دالة التوزيع الاحتمالي [f(x)] للمتغير العشوائي (X) ، تأخذ الشكل الآتي:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha} & , \quad \alpha \le x \le \beta \\ \\ 0 & , \quad o/w \end{cases}$$

والشكل التالي، يوضح دالة الكثافة الاحتمالية [f(x)] للتوزيع المنتظم:



وغالباً ما يُعبر عن التوزيع المنتظم، إختصاراً بالاصطلاح الآتي:

$$X \sim U(\alpha , \beta)$$

وهذا يعني إن المتغير العشوائي (X)، يتوزع وفق التوزيع المنتظم بالمعلمتين (α) و (β).

ويمكن ايجاد دالة التوزيع التجميعية (.C.D.F) للتوزيع المنتظم، كالآتي:

$$F(X) = P(X \leq x)$$

$$= \int_{\alpha}^{x} f(x)dx$$

$$= \int_{\alpha}^{x} \frac{1}{\beta-\alpha} dx$$

$$= \frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{x} dx$$

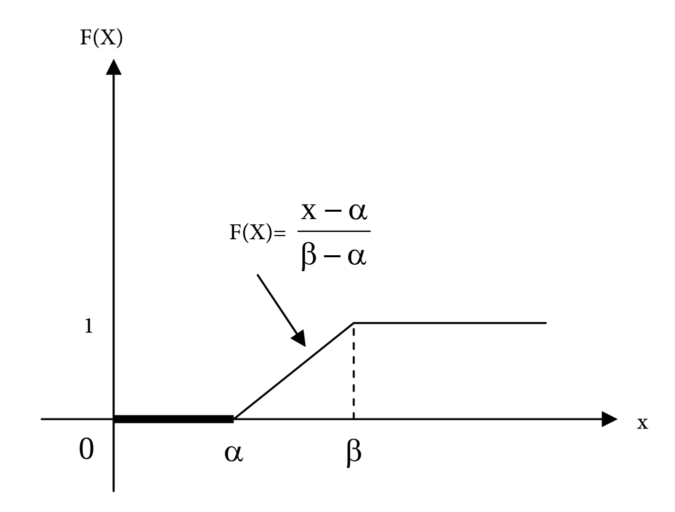
$$= \frac{1}{\beta-\alpha}\left[x \right|_{\alpha}^{x}$$

$$\therefore F(X) = \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}$$

عليه تكتب دالة التوزيع الاحتمالي التجمعية، بشكلها النهائي، على النحو الآتي:

$$F(X) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq \alpha \\ \dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha} & , \quad \alpha < x < \beta \\ 1 & , \quad x \geq \beta \end{cases}$$

والشكل التالي، يوضح دالة التوزيع التجميعية [F(X)] للتوزيع المنتظم:



إن الوسط الحسابي (μ_x) والتباين (σ_x^2) والانحـراف المعيـاري (σ_x)، للتوزيـع المنـتظم، تكتـب على النحو الآتي:

$$1-\ \mu_x = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$2-\ \sigma_x^2 = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$$

$$3-\ \sigma_x = \frac{\beta-\alpha}{\sqrt{12}}$$

وفيما يلي، بعض الأمثلة التطبيقية التي توضح استخدامات التوزيع المنتظم:

مثال (21) :

لديك المتغير العشوائي المتصل (X) ، يتوزع وفق التوزيع المنتظم، بـالمعلمتين (α=-2) و (β=6) ، أي إن :

$X \sim U(-2\ ,\ 6)$

المطلوب:

1- اكتب دالة الكثافة الاحتمالية (p.d.f) للمتغير العشوائي (X) .
2- اكتب دالة التوزيع التجميعية (C.F.D) للمتغير العشوائي (X) .
3- إحسب قيمة الاحتمالات الآتية:

a- $P(X \leq 3)$, b- $P(X > 2)$

c- $P(-3 < X \leq -1)$, d- $P(-3 < X \leq 7)$

Solution :

$$1)\ \because f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta-\alpha} & , \quad \alpha \leq x \leq \beta \\ 0 & , \quad o/w \end{cases}$$

$$\because\ \alpha = -2 \qquad , \quad \beta = 6$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} & , \quad -2 \leq x \leq 6 \\ 0 & , \quad o/w \end{cases}$$

2) $\because F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \le \alpha \\ \dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha} & , \quad \alpha < x < \beta \\ 1 & , \quad x \ge \beta \end{cases}$

$\therefore F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \le -2 \\ \dfrac{x+2}{8} & , \quad -2 < x < 6 \\ 1 & , \quad x \ge 6 \end{cases}$

3- a) $P(X \le 3) = F(3)$

$= \dfrac{3+2}{8}$

$= 0.625$

b) $P(X > 2) = 1 - P(X \le 2)$

$= 1 - F(2)$

$= 1 - \dfrac{2+2}{8}$

$= 1 - 0.5$

$= 0.5$

c) $P(-3 < X \le -1) = P(X \le -1) - P(X \le -3)$

$= F(-1) - F(-3)$

$= \dfrac{-1+2}{8}$ - Zero

$= \dfrac{1}{8}$

$= 0.125$

d) $P(-3 < X \le 7) = P(X \le 7) - P(X \le -3)$

$= F(7) - F(-3)$

= 1 – Zero

= 1

مثال (22) :

إذا كان المتغير العشوائي المتصل (X) ، يمثل وقت الوصول الحقيقي لباخرة ما، إلى ميناء العقبة، ويتوزع وفق التوزيع المنتظم بالمعلمتين ($\alpha = 0$) و ($\beta = 20$) ، أي إن:

$X \sim U\ (0\ ,\ 20)$

المطلوب:

1- اكتب دالة الكثافة الاحتمالية، ودالة التوزيع التجميعية للمتغير العشوائي (X).
2- ما هو احتمال وصول الباخرة خلال الخمس (5) دقائق الاخيرة على الأقل؟
3- ما هو احتمال وصول الباخرة خلال العشرة (10) دقائق الأخيرة؟
4- احسب القيمة المتوقعة (μ_x) والتباين $\left(\alpha_x^2\right)$ لوقت وصول الباخرة.

Solution :

$$1)\ \because f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta-\alpha} & , \quad \alpha \le x \le \beta \\ 0 & , \quad o/w \end{cases}$$

$$\because \alpha = 0 \qquad , \quad \beta = 20$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{20} & , \quad 0 \le x \le 20 \\ 0 & , \quad o/w \end{cases}$$

$$\because F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \le \alpha \\ \dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha} & , \quad \alpha < x < \beta \\ 1 & , \quad x \ge \beta \end{cases}$$

$$\therefore F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \le 0 \\ \dfrac{x}{20} & , \quad 0 < x < 20 \\ 1 & , \quad x \ge 20 \end{cases}$$

$$2)\ P(X > 15) = 1 - P(X \le 15)$$
$$= 1 - F(15)$$
$$= 1 - \frac{15}{20}$$
$$= 0.25$$

$$3)\ P(10 < X \le 20) = P(X \le 20) - P(X \le 10)$$
$$= F(20) - F(10)$$
$$= \frac{20}{20} - \frac{10}{20}$$
$$= 1 - 0.5$$
$$= 0.5$$

$$4)\ \mu_x = \frac{\alpha + \beta}{2}$$
$$= \frac{0 + 20}{2}$$
$$= 10 \text{ Minutes}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}$$
$$= \frac{(20 - 0)^2}{12}$$
$$= \frac{400}{12}$$
$$= 33.3 \text{ Minute}$$

5-3-4 توزيع گاما : Gamma Distribution

يُعد توزيع گاما من التوزيعات الشائعة الاستخدام في بعض التطبيقات الاحصائية، نذكر منها على سبيل المثال لا الحصر، تقدير دالة المعولية (Reliablity Function)، وتقدير دالة البقاء (Survival Function) ، كما ويُعد هذا التوزيع الأساس النظري لتوليد بعض التوزيعات الاحتمالية الخاصة، كالتوزيع الاسي مثلاً، من جانب آخر يعالج توزيع گاما عادة المتغيرات العشوائية التي تكون قيمها موجبة دائماً، والأمثلة على هذا النوع من المتغيرات كثيرة، نذكر منها مثلاً: الفترة الزمنية لبقاء إنسان على قيد الحياة مصاب

بمرض عضال، الفترة الزمنية المستغرقة بفحص مريض في احدى العيادات الطبية، الفترة الزمنية بين وصول باخرتين متتاليتين لاحد أرصفة العقبة...الخ.

وبافتراض لدينا متغير عشوائي متصل وليكن (X) ، يتوزع وفق توزيع گاما، فان دالة التوزيع الاحتمالي له، تأخذ الشكل الآتي:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma\alpha}.x^{\alpha-1}e^{-\frac{X}{\beta}} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad o/w \end{cases}$$

حيث إن :

α, β : تمثل معلمات توزيع گاما، وإن [$0 < \alpha , \beta$] .

$\Gamma\alpha$: تمثل دالة گاما (Gamm function) .

وتأخذ دالة گاما (Gamma function) ، الشكل الآتي:

$$\Gamma\alpha = \int_{0}^{\infty} x^{\alpha-1}.e^{-x}dx$$

وبصورة عامة، إذا كان لدينا العدد (n) ، عدد صحيحاً موجباً، فان دالة گاما، تأخذ الشكل الآتي:

$$\Gamma n = (n-1)!$$

وفيما يلي، بعض الحالات الخاصة لدالة گاما :

1) $\Gamma 1 = 1$

2) $\Gamma_{\frac{1}{2}} = \pi \qquad , \quad \pi = 3.14159$

وغالباً ما يعبر عن توزيع گاما، إختصاراً بالاصطلاح الآتي:

$X \sim G(\alpha , \beta)$

وهذا يعني إن المتغير العشوائي (X) ، يتوزع وفق توزيع گاما بالمعلمتين (α) و (β) .

ويمكن ايجاد دالة التوزيع التجميعية (C.D.F) لتوزيع گاما، كالآتي:

$F(X) = P(X \leq x)$

$$F(X) = \int_0^x f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma\alpha}\int_0^x X^{\alpha-1}.e^{-\frac{X}{\beta}}dx$$

إن الوسط الحسابي (μ_x) والتباين (σ_x^2) والانحراف المعياري (σ_x)، لتوزيع گاما، تكتب على النحو الآتي:

1- $\mu_x = \alpha\beta$

2- $\sigma_x^2 = \alpha\beta^2$

3- $\sigma_x = \beta\sqrt{\alpha}$

والمثال التالي، يوضح أحد استخدامات توزيع گاما :

مثال (23) :

إذا كان لديك المتغير العشوائي المتصل (X) ، يمثل الفترة الزمنية لعمل ماكنة إنتاجية (بالسنوات)، وله دالة التوزيع الاحتمالي الآتية :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{4}.e^{-\frac{x}{2}} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad o/w \end{cases}$$

المطلوب:

1- إثبت إن دالة التوزيع الاحتمالي اعلاه، هي دالة كثافة احتمالية.

2- ما هو احتمال أن تستمر الماكنة بالعمل مدة (10) سنوات أخرى على الأكثر؟

3- إحسب متوسط عمر الماكنة (μ_x) والتباين (σ_x^2) .

Solution :

1- لاثبات إن الدالة [f(x)] ، هي دالة كثافة احتمالية (p.d.f) ، ينبغي أن تحقق الدالة الخاصيتين الآتيتين:

a) $\because f(x) \geq 0 \qquad , \qquad [\ \forall x\ ,\ x \geq 0\ ]$

b) $\because \int_0^{\infty} f(x)dx = \int_0^{\infty} \frac{x}{4}.e^{-\frac{x}{2}}dx$

$$\therefore \int_0^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{4}\int_0^{\infty} x.e^{-\frac{x}{2}}dx$$

لحل التكامل اعلاه، نقوم باستخدام قاعدة التكامل $(\int udv)$ ، وعلى النحو الآتي:

$\int udv = uv - \int vdu$

Let $u = x \Rightarrow \therefore du = dx$

Let $dv = e^{-\frac{x}{2}} \Rightarrow \therefore \int dv = \int e^{-\frac{x}{2}} dx \quad \Rightarrow \quad \therefore v = -2e^{-\frac{x}{2}}$

$$\therefore \int_0^\infty f(x)dx = \frac{1}{4}\int_0^\infty x.e^{-\frac{x}{2}}dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[-2xe^{-\frac{x}{2}}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \left(-2e^{-\frac{x}{2}}\right)dx\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[0 + 2\int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}}dx\right]$$

$$= 0 + \frac{1}{2}\left[-2e^{-\frac{x}{2}}\right|_0^\infty$$

$$= - [0 - 1]$$

$$= 1$$

$\therefore$ دالة التوزيع الاحتمالي $[f(x)]$ ، هي دالة كثافة إحتمالية (p.d.f) .

2) $P(X \leq 10) = \int_0^{10} f(x)dx$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{10} x.e^{-\frac{x}{2}}dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[-2xe^{-\frac{x}{2}}\Big|_0^{10} + 2\int_0^{10} e^{-\frac{x}{2}}dx\right]$$

$$P(X \le 10) = \frac{1}{4}\left\{-20e^{-5} + 2\left[-2e^{-\frac{x}{2}}\right|_0^{10}\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left[-20(0.007) - 4(e^{-5} - 1)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[(-0.14) - 4(0.007 - 1)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[(-0.14) - 4(-0.993)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[-0.14 + 3.972\right]$$

$$= \frac{1}{4}(3.832)$$

$$= 0.958$$

3) $\mu_x = \alpha\beta$

$= 2(2)$

$= 4$ Year

$\sigma_x^2 = \alpha\beta^2$

$= 2(2)^2$

$= 8$ Year ^{2}

6-3-4 : التوزيع الأسي : Exponential Distribution

يُعد التوزيع الأسي، حالة خاصة من توزيع گاما، عندما (α=1) ، ويستخدم هذا التوزيع لمعالجة بعض التطبيقات الاحصائية الخاصة بالمتغيرات العشوائية، مثال ذلك (تقدير دالة معولية المكائن والالات، مدة البقاء لبعض الاجزاء الالكترونية، طول فترة الانتظار في صف انتظار عند الاشارة الضوئية، طبيعة البيانات المتعلقة بدرجات الحرارة العظمى والصغرى المسجلة من قبل دائرة الانواء الجوية).

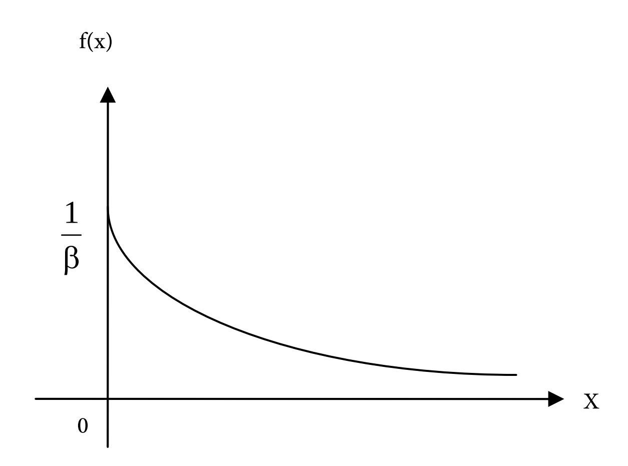
وبافتراض لدينا متغير عشوائي متصل وليكن (X) ، يتوزع وفق التوزيع الأسي، فـان دالـة التوزيـع الاحتمالي له، تأخذ الشكل الآتي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta}.e^{-\frac{x}{\beta}} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad o/w \end{cases}$$

وغالبا ما يعبر عن التوزيع الأسي، إختصاراً بالاصطلاح الآتي:

$$X \sim Exp.(\beta)$$

وهذا يعني إن المتغير العشوائي (X) ، يتوزع وفق التوزيع الاسي بالمعلمة (β) .
والشكل التالي، يوضح دالة الكثافة الاحتمالية [f(x)] للتوزيع الأسي :



ويمكن ايجاد دالة التوزيع التجميعية (C.D.F) للتوزيع الأسي، كالآتي:

$$F(X) = P(X \leq x)$$
$$= \int_0^x f(x)dx$$
$$= \frac{1}{\beta}\int_0^x e^{-\frac{x}{\beta}}dx$$

$$F(x) = \frac{1}{\beta}\left[-\beta e^{-\frac{x}{\beta}}\right]_0^x$$

$$= -\left[e^{-\frac{x}{\beta}} - 1\right]$$

$$= 1 - e^{-\frac{x}{\beta}}$$

إن الوسط الحسابي (μ_x) والتباين (σ_x^2) والانحراف المعياري (σ_x)، للتوزيع الأسي، تكتب على النحو الآتي:

1- $\mu_x = \beta$

2- $\sigma_x^2 = \beta^2$

3- $\sigma_x = \beta$

والمثال التالي، يوضح أحد تطبيقات التوزيع الأسي:

مثال (24) :

إذا كان لديك المتغير العشوائي المتصل (X) ، يمثل مدة البقاء (ساعة) لجزء الكتروني يستخدم في أجهزة التلفاز، وله دالة كثافة احتمالية، تأخذ الشكل الآتي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{500}.e^{-\frac{X}{500}} & , \quad X \geq 0 \\ 0 & , \quad o/w \end{cases}$$

المطلوب:

1- ما هو احتمال أن يعمر هذا الجزء مدة (600) ساعة على الأكثر؟
2- ما هو احتمال أن يعمر هذا الجزء مدة (400-600) ساعة؟
3- إحسب متوسط عمر الجزء الالكتروني (μ_x) والتباين (σ_x^2) .

Solution :

1- $\because P(X \leq x) = F(x)$

\ $\therefore P(X \leq 600) = F(600)$

$$= 1 - e^{-\frac{600}{500}}$$

$$= 1 - e^{-1.2}$$

$$= 1 - 0.301$$

$$= 0.699$$

2) $P(400 \leq X \leq 600) = P(X \leq 600) - P(X < 400)$

$$= F(600) - F(400)$$

$$= \left[1 - e^{-\frac{600}{500}}\right] - \left[1 - e^{-\frac{400}{500}}\right]$$

$$= e^{-\frac{400}{500}} - e^{-\frac{600}{500}}$$

$$= e^{-0.8} - e^{-1.2}$$

$$= 0.449 - 0.301$$

$$= 0.148$$

3) $\mu_x = \beta$

$$= 500 \text{ hr.}$$

$$\sigma_x^2 = \beta^2$$

$$= (500)^2$$

$$= 250000 \text{ hr}^2$$

7-3-4 : توزيع بيتا : Beta Distribution

يُعد توزيع بيتا من التوزيعات الاحصائية المهمة على مستوى كثير من التطبيقات في الحياة العملية، ويستخدم بشكل واسع في دراسة سلوك بعض المتغيرات العشوائية، مثال ذلك: دراسة طبيعة البيانات المسجلة من قبل دائرة الانواء الجوية والمتعلقة بنسب الرطوبة، أو دراسة معولية الاجهزة والمعدات.

وبافتراض لدينا متغير عشوائي متصل وليكن (X) يتوزع وفق توزيع بيتا، فان دالة التوزيع الاحتمالي له، تأخذ الشكل الآتي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma\alpha+\beta}{\Gamma\alpha\Gamma\beta} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} & , \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & , \quad o/w \end{cases}$$

وغالباً ما يعبر عن توزيع بيتا، إختصاراً بالاصطلاح الآتي:

$$X \sim \beta\,(\alpha\,,\beta)$$

وهذا يعني إن المتغير العشوائي (X) ، يتوزع وفق توزيع بيتا بالمعلمتين (α) و (β) .
ويمكن ايجاد دالة التوزيع التجميعية (C.D.F) لتوزيع بيتا، كالآتي:

$$F(X) = P\,(X \le x)$$

$$= \int_0^x f(x)dx$$

$$= \frac{\Gamma\alpha+\beta}{\Gamma\alpha+\Gamma\beta}\int_0^x x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$$

إن الوسط الحسابي (μ_x) والتباين (σ_x^2) والانحراف المعياري (σ_x)، لتوزيع بيتا، تكتب على النحو الآتي :

1- $\mu_x = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$

2- $\sigma_x^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$

3- $\sigma_x = \frac{1}{\alpha+\beta} * \sqrt{\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta+1}}$

والمثال التالي، يوضح احد تطبيقات توزيع بيتا :

مثال (25) :

إذا كان لديك المتغير العشوائي (X) ، يمثل نسبة الرطوبة في مدينة السلط، وله دالة التوزيع الاحتمالي الآتية :

$$f(x) = \begin{cases} 30x^2(1-x)^2 & , \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & , \quad o/w \end{cases}$$

المطلوب :

1- إثبت إن دالة التوزيع الاحتمالي اعلاه، هي دالة كثافة احتمالية.
2- ما هو احتمال أن تكون نسبة الرطوبة في المدنية (40%) على الأكثر؟
3- ما هو احتمال أن تكون نسبة الرطوبة في المدنية (30%) على الأقل؟
4- إحسب القيمة المتوقعة (μ_x) والتباين (σ_x^2) والانحراف المعياري (σ_x).

Solution :

1- لاثبات إن دالة التوزيع الاحتمالي، هي دالة كثافة احتمالية (p.d.f) ، ينبغي بالدالة أن تحقق الخاصيتين الآتيتين :

a) $f(x_i) \ge 0 \quad , \quad [\ \forall x_i \quad , \quad 0 \le x_i \le 1\ ]$

b) $$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 30x^2(1-x)^2 dx$$

$$= 30\int_0^1 x^2(1-2x+x^2)dx$$

$$= 30\int_0^1 (x^2-2x^3+x^4)dx$$

$$= 30\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{5}\right|_0^1$$

$$= 30\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)$$

$$= 30\left(\frac{1}{30}\right)$$

$$= 1$$

$\therefore$ دالة التوزيع الاحتمالي [f(x)] ، هي دالة كثافة احتمالية (p.d.f) .

2) $$P(X \le 0.4) = \int_0^{0.4} f(x)dx$$

$$= \int_0^{0.4} 30x^2(1-x)^2 dx$$

$$P(X \leq 0.4) = 30\int_0^{0.4}\left(x^2 - 2x^3 + x^4\right) dx$$

$$= 30\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5}\right|_0^{0.4}$$

$$= 30\left[\frac{(0.4)^3}{3} - \frac{(0.4)^4}{2} + \frac{(0.4)^5}{5}\right]$$

= 30 [0.021 – 0.013 + 0.002]

= 30 (0.01)

= 0.3

3) $P(X \geq 0.3) = 1 - P(X < 0.3)$

$$= 1 - \int_0^{0.3} f(x)dx$$

$$= 1 - \int_0^{0.3} 30x^2(1-x)^2 dx$$

$$= 1 - 30\int_0^{0.3}\left(x^2 - 2x^3 + x^4\right) dx$$

$$= 1 - 30\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5}\right|_0^{0.3}$$

$$= 1 - 30\left[\frac{(0.3)^3}{3} - \frac{(0.3)^4}{2} + \frac{(0.3)^5}{5}\right]$$

= 1 – 30 (0.0054)

= 1 – 0.162

= 0.838

4) $\because \alpha = 3$, $\beta = 3$

$$\therefore \mu_x = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

$$= \frac{3}{3+3}$$

= 0.5

$$\therefore\ \sigma_x^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

$$= \frac{3(3)}{(3+3)^2(3+3+1)}$$

$$= \frac{1}{28}$$

$$= 0.036$$

$$\therefore \sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$$

$$= \sqrt{0.036}$$

$$\approx 0.1897$$

أو يمكن ايجاد الانحراف المعياري (σ_x) ، باستخدام العلاقة الآتية :

$$\sigma_x = \frac{1}{\alpha+\beta} * \sqrt{\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta+1}}$$

$$= \frac{1}{3+3} * \sqrt{\frac{3(3)}{3+3+1}}$$

$$= \frac{1}{6} * \sqrt{\frac{9}{7}}$$

$$= \frac{1}{6} * (1.134)$$

$$= 0.189$$

أسئلة عامة حول الفصل الرابع

س1 : إذا كان احتمال فوز فريق نادي الفيصلي الرياضي بكرة القدم في أي مباراة يساوي (0.75) ، فاذا لعب الفريق (4) مباريات :

المطلوب :

1- ما هو إحتمال أن يفوز الفريق في مبارتين؟
2- ما هو إحتمال أن يفوز الفريق في ثلاث مباريات على الأقل ؟
3- ما هو إحتمال أن يفوز الفريق في مباراة واحدة على الأكثر؟

س2 : تقوم احدى الشركات المتخصصة بانتاج الحاسبات الالكترونية، بضمان صيانة مبيعاتها لمدة سنة واحدة، فاذا كان عدد طلبات خدمة الصيانة يتوزع وفق توزيع بواسون بمتوسط (3) طلبات.

المطلوب:

1- احتمال استلام (4) طلبات صيانة خلال فترة الضمان .
2- احتمال استلام (3) طلبات صيانة على الاقل خلال فترة الضمان.
3- احتمال استلام (2) طلبي صيانة على الأكثر خلال فترة الضمان.

س3 : قام احد المصانع المتخصصة بانتاج البطاريات بفحص جودة منتجاته، وبعد الانتهاء من عملية الفحص، لاحظ وجود نسبة (0.03) من البطاريات المنتجة غير صالحة للاستعمال. ولدى استلام احد الوكلاء حصته الشهرية، رفض استلام احد الصناديق الذي يحتوي على (200) بطارية، لاعتقاده بوجود عدد من البطاريات التي يحتويها الصندوق غير صالحة للاستعمال.

المطلوب:

1- اكتب دالة التوزيع الاحتمالي، للمتغير العشوائي (X) .

2- ما هو احتمال أن يحتوي هذا الصندوق على (5) بطاريات على الاقل غير صالحة للاستعمال.

3- احسب متوسط عدد البطاريات غير الصالحة للاستعمال (μ_x) والانحراف المعياري (σ_x).

س4 : إذا كان إحتمال أن يسجل (أحمد) هدفاً في الرمية الواحدة (0.3) .

المطلوب:

1- ما هو إحتمال أن يسجل أحمد أول هدف في الرمية الرابعة ؟

2- ما هو احتمال أن يخفق أحمد (5) مرات قبل أن يسجل اول هدف له؟

3- إحسب معدل عدد المحاولات التي يحتاجها أحمد (μ_x) والتباين (σ_x^2).

س5 : يحتوي مخزن احدى الشركات العاملة في الأردن، على (20) آلة حاسبة، من ضمنها (6) حاسبات عاطلة عن العمل، قام احد المهندسين في الشركة بسحب (5) حاسبات بدون إرجاع.

المطلوب:

1- أكتب دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (X) ، الذي يمثل عدد الحاسبات العاطلة عن العمل.

2- ما هو احتمال أن يكون من بين الحاسبات المحسوبة (3) حاسبات عاطلة؟

3- جد الوسط الحسابي (μ_x) والتباين (σ_x^2).

س6 : عند رمي زهرة نرد متجانسة مرة واحدة، في تجربة عشوائية.

المطلوب :

1- أكتب دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (X) ، الذي يمثل الرقم الظاهر على وجه زهرة النرد.

2- إرسم دالة التوزيع الاحتمالي [P (X = x)] .

3- جد الوسط الحسابي (μ_x) والانحراف المعياري (σ_x).

س7 : إذا كانت اوزان مجموعة من الطلبة تتوزع وفق التوزيع الطبيعي، بمتوسط حسابي بلغ (65) كغم، وتباين قدره (100) كغم ، أختير احد الطلبة عشوائياً.

المطلوب:

1- ما هو إحتمال أن يكون وزن الطالب أقل من (60) كغم؟

2- ما هو إحتمال أن يكون وزن الطالب أكثر من (70) كغم؟

3- ما هو إحتمال أن يكون وزن الطالب بين (60-80) كغم؟

س8 : لديك المتغير العشوائي المتصل (X) ، يتوزع وفق التوزيع الطبيعي المعياري.

المطلوب: إحسب قيمة الاحتمالات الآتية :

1- $P(Z \leq 1.25)$

2- $P(Z > 0.85)$

3- $P(-0.15 < Z \leq 0.75)$

س9 : لديك المتغير العشوائي المتصل (X) ، يتوزع وفق التوزيع المنتظم، بمتوسط حسابي بلغ (5) وتباين قدره (12) .

المطلوب:

1- أكتب دالة التوزيع التجميعية (.C.D.F) للتوزيع المنتظم.

2- إحسب قيمة الاحتمال [$P(X > 5)$] .

س10 : لديك المتغير العشوائي المتصل (X) ، يتوزع وفق التوزيع المنتظم، بالمعلمتين (α=2) و (β=5) .

المطلوب:

1- أكتب دالة التوزيع الاحتمالي، ودالة التوزيع التجميعية (.C.D.F) .

2- جد الوسط الحسابي (μ_x) والتباين (σ_x^2).

س11 : لديك المتغير العشوائي المتصل (X) ، يتوزع وفق التوزيع المنتظم، بالمعلمة (α=1) وبوسط حسابي قدره (μ_x=3) .

المطلوب:

1- أكتب دالة التوزيع التجميعية (C.D.F) للتوزيع المنتظم.

2- إحسب قيمة الاحتمال [$P(4 < X \leq 5)$] .

3- جد قيمة التباين (σ_x^2) والانحراف المعياري (σ_x) .

س12 : لديك المتغير العشوائي المتصل (X) ، يمثل مدة البقاء على قيد الحياة (بالسنيين) لانسان مصاب بمرض عضال، وله دالة التوزيع الاحتمالي الآتية :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9} x e^{-\frac{x}{3}} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad o/w \end{cases}$$

المطلوب:

1- ما هو إحتمال أن يبقى المريض على قيد الحياة مدة (3) سنوات أخرى على الأقل؟

2- جد قيمة الوسط الحسابي (μ_x) والتباين (σ_x^2) والانحراف المعياري (σ_x) .

س13 : لديك المتغير العشوائي المتصل (X) ، يمثل مدة انتظار احد الباصات (بالدقائق) في صف الانتظار عند الاشارة الضوئية، وله دالة كثافة احتمالية، على الشكل الآتي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{4}} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad o/w \end{cases}$$

المطلوب:

1- ما هو احتمال أن ينتظر هذا الباص على الأقل (6) دقائق؟

2- ما هو احتمال أن ينتظر هذا الباص بين (10-20) دقيقة؟

3- جد متوسط وقت الانتظار (μ_x) والتباين (σ_x^2).

س14 : لديك المتغير العشوائي المتصل (X) ، يمثل نسبة الرطوبة في مدينة جرش، وله دالة التوزيع الاحتمالي الآتية :

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & , \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & , \quad o/w \end{cases}$$

المطلوب:

1- إثبت إن دالة التوزيع الاحتمالي اعلاه، هي دالة كثافة إحتمالية (.p.d.f) .
2- ما هو إحتمال أن تكون نسبة الرطوبة في المدينة (20%) على الأكثر؟
3- ما هو إحتمال أن تكون نسبة الرطوبة في المدينة بين (20% و 50%) ؟
4- إحسب القيمة المتوقعة (μ_x) والتباين (σ_x^2) لنسبة الرطوبة في مدينة جرش .

س15 : لديك المتغير العشوائي المتصل (x) ، يمثل نسبة الرطوبة في مدينة بغداد، وله دالة التوزيع الاحتمالي الآتية :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , \quad 0 \ge x \le 1 \\ 0 & , \quad o/w \end{cases}$$

المطلوب:

1- ما هو احتمال أن تكون نسبة الرطوبة في مدينة بغداد (20%) على الأقل؟
2- ما هو احتمال أن تكون نسبة الرطوبة في مدينة بغداد (10%) على الأكثر؟
3- إحسب القيمة المتوقعة (μ_x) والانحراف المعياري (σ_x) .

الفصل الخامس
الارتباط والانحدار الخطي البسيط
Simple Linear Correlation & Regression

1-5 : مقدمة :

يُعد الارتباط والانحدار الخطي من اكثر الطرق الاحصائية شيوعاً وإستخداماً على مستوى دراسة وتحليل العلاقة الارتباطية والتأثيرية بين المتغيرات المدروسة لمختلف العلوم (طبيعية كانت أم إنسانية)، وتبرز الحاجة إلى هذا النوع من التحليل في المجالات الاقتصادية والادارية والتربوية، مثال ذلك: دراسة العلاقة بين الدخل الشهري وحجم الانفاق الاسري، من جهة، وتأثير متغير الدخل الشهري في حجم الانفاق الاسري، من جهة ثانية، ودراسة العلاقة بين الابداع في عناصر المزيج التسويقي والتفوق التنافسي لشركة ما، من جهة، وتأثير متغير الابداع في التفوق التنافسي، من جهة ثانية، وغيرها من المتغيرات لظواهر أخرى.

وسيتم التركيز في هذا الفصل على دراسة الارتباط الخطي البسيط، وكيفية قياس العلاقة بين متغيرين كميين (كلا المتغيرين يمكن قياسهما كمياً)، أو في حالة كون المتغيرين وصفيين، أو أحد المتغيرين وصفي والآخر كمي، وكذلك اختبار معنوية العلاقة الارتباطية بين المتغيرين، كما سيتم تسليط الضوء بشيء من التفصيل على دراسة الانحدار الخطي البسيط (دراسة متغيرين فقط)، وتوضيح أهم المؤشرات الاحصائية التي يمكن استخدامها في قياس كفاءة نموذج الانحدار الخطي البسيط.

2-5 : الارتباط : The Correlation

مما لا شك فيه إن إبرز ما يمكن الاهتمام به عند دراسة الارتباط بشكل عام، هو التعرف على طبيعة وإتجاه العلاقة الارتباطية ومقدار قوتها بين ظاهرتين أو أكثر، كالعلاقة بين المستوى الثقافي للابوين والتحصيل الدراسي لابنائهم، أو العلاقة بين

ظاهرتي عدد أفراد الأسرة وحجم الانفاق الشهري، أو العلاقة بين متغير مهارة العاملين والانتاجيـة اليوميـة في مصنع ما ، وغيرها من الظواهر الأخرى في الحياة العملية.

وبناءاً على ما تقدم، يمكن أن تكون العلاقة بين اية ظاهرتين ولتكن (X) و (Y) على عدة اشكال، فقد تكون العلاقة بين الظاهرتين طردية (موجبـة)، بمعنـى إن ايـة زيـادة أو نقصـان في قيمـة المتغـير (X) ستؤدي وبنفس الاتجاه إلى زيادة أو نقصان في قيم المتغير (Y) ، وقد تكون العلاقة عكسية (سالبة)، أي إن الزيادة في قيم المتغير (X) أو نقصانها، ستؤدي باتجاه معاكس إلى نقصان في قيم المتغير (Y) او زيادتها.

عليه فان الاساس في دراسة العلاقة الارتباطيـة بـين المتغـيرات، يسـتند إلى العلاقـة السـببية التـي تربط المتغيرات بعضها مع البعض الآخر، وهذا يعني وجود علاقة ارتباط منطقية تفسر سبب الارتباط بـين المتغيرات، فعلى سبيل المثال لا الحصر، إن زيادة اوجه إنفاق أسرة مـا عـلى السـلع والخـدمات، نـاجم عـن عامل معين أو عدد من العوامل أدت إلى هذه الزيادة، منها مثلاً، ارتفاع الدخلل الشهري للأسرة، أو زيـادة عدد أفراد الأسرة.. الخ، ففي هذا المثال تتضح العلاقة المنطقية بـين المتغـيرات، إلا إنـه لـيس بالامكـان مـن تحديد علاقة منطقية بين متغير مستوى ذكاء الطفل وحجم قدمـه، بـالرغم مـن امكانيـة حسـاب العلاقـة الارتباطية بين المتغيرين، الا انه لا يمكن تفسير هذه العلاقة.

ويكون الارتباط الخطي، على أنواع متعددة، هي:

1- الارتباط الخطي البسيط Simple Linear Correlation .
2- الارتباط الجزئي Partial Correlation .
3- الارتباط المتعدد Multiple Correlation .

وسيتم التركيز بشكل مفصل في هذا الكتاب على النوع الأول المتمثل بالارتباط الخطي البسيط، لاهميتـه في دراسة العلاقة الخطية بين متغيرين فقط، وعلى النحو الآتي:

3-5 : الارتباط الخطي البسيط : **Simple Linear Correlation**

يُعرف الارتباط الخطي البسيط بانه "درجة العلاقة الارتباطيـة بـين متغـيرين فقـط، هـما (X) و (Y) "

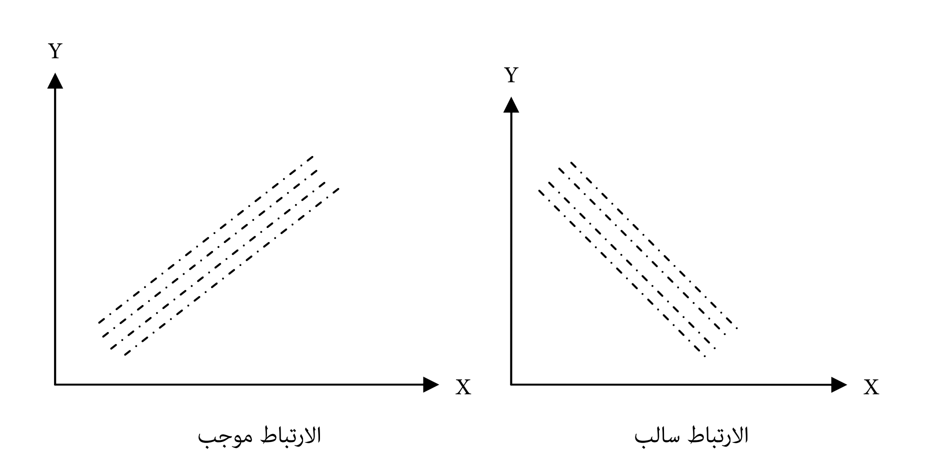
ويمكن قياس العلاقة الارتباطية بين المتغيرين، على مرحلتين، وكالآتي:

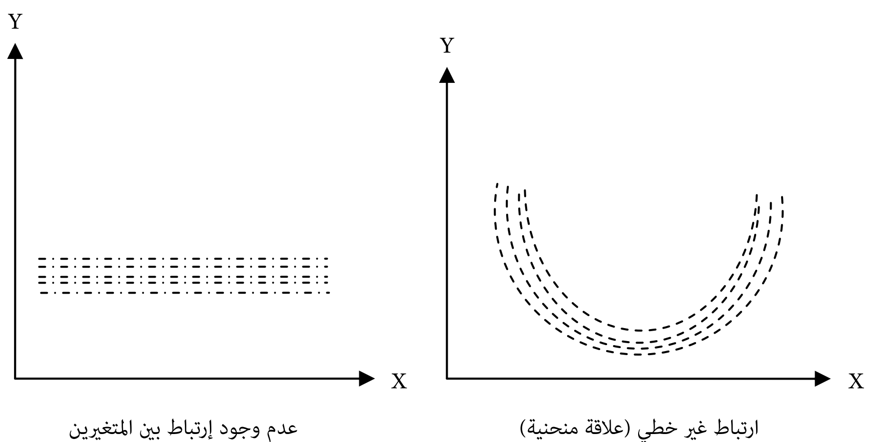
أ- الشكل الانتشاري : **Scatter Diagram**

يُعد الشكل الانتشاري من ابسط الطرق لعرض بيانات متغيرين يفترض بينهما علاقة إرتباطية، إذ يتم من خلاله تكوين فكرة اولية حول اتجاه وقوة العلاقة بين المتغيرين.

وبافتراض لدينا متغيرين هما (X) و (Y) على اساس عينة عشوائية من المشاهدات قوامهـا (n) ، فان ازواج القيم لهذين المتغيرين تكتب على الشكل الآتي:

$[(X_n , Y_n) ,...., (X_2 , Y_2) , (X_1 , Y_1)]$ ، وعند تمثيل ازواج قـيم المتغـيرين بواسـطة الشـكل الانتشـاري، فاننا سنحصل على احد الأشكال التالية، والتي من خلالها سيتم التعـرف عـلى طبيعـة العلاقـة وقوتهـا بـين المتغيرين.





عدم وجود إرتباط بين المتغيرين

ارتباط غير خطي (علاقة منحنية)

ب- معامل الارتباط البسيط : Simple Correlation Coefficient

يُعرف معامل الارتباط البسيط بانه "القيمة العددية للعلاقة الارتباطية الخطية بين متغيرين فقط"، ويأخذ معامل الارتباط البسيط عدد من الأشكال والصيغ الرياضية، ويرمز له بالرمز (r) ، وفيما يلي شرحاً مفصلاً لهذا المقياس .

1- معامل الارتباط البسيط لبيرسون :

وهو مؤشر إحصائي يستخدم لقياس القوة الارتباطية الخطية بين متغيرين كميين، أي (يمكن قياسهما كمياً) ، مثال ذلك، قياس العلاقة بين الدخل الشهري للاسرة (X) وحجم إنفاقها الشهري (Y) ، ويعود الفضل الأول للعالم الانكليزي "كارل بيرسون " (K.Person) (1867-1936) في وضع الصيغة العامة لهذا المقياس .

ويمكن ايجاد معامل الارتباط البسيط، وفقاً لصيغة "بيرسون" الآتية:

$$r_p = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}}\sqrt{S_{yy}}}$$

حيث إن :

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)\left(Y_i - \overline{Y}\right)$$

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \overline{Y}\right)^2$$

إن الصيغ [S_{yy} , S_{xx} , S_{xy}] أعلاه، تـم ايجادهـا وفقـاً لطريقـة الانحرافـات (Deviations) . مـن جانب آخر، بالامكان ايجاد معامل الارتباط البسيط، وفقاً لصيغ بديلة لكـل مـن [S_{yy} , S_{xx} , S_{xy}] ، وعـلى النحو الآتي:

$$1)\quad S_{xy} = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - n\overline{X}\,\overline{Y}$$

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2$$

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - n\overline{Y}^2$$

$$2)\quad S_{xy} = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)}{n}$$

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}{n}$$

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2}{n}$$

حيث إن :

n : تمثل عدد أزواج القيم (Y_i , X_i) لكلا المتغيرين .

$\overline{X}, \overline{Y}$: تمثل المتوسطات الحسابية للمتغيرين (X) و (Y) .

$\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i$: تمثل مضاريب قيم المتغيرين (X) و (Y) .

$\sum_{i=1}^{n} X_i^2$: تمثل مجموع مربعات قيم المتغير (X) .

$\sum_{i=1}^{n} Y_i^2$: تمثل مجموع مربعات قيم المتغير (Y) .

تذكر بان:

$$1-\ \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i \neq \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)$$

$$2-\ \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \neq \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2$$

$$3-\ \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 \neq \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2$$

2- خصائص معامل الارتباط البسيط لبيرسون :

يتصف معامل الارتباط البسيط لبيرسون ، بالخصائص الآتية :

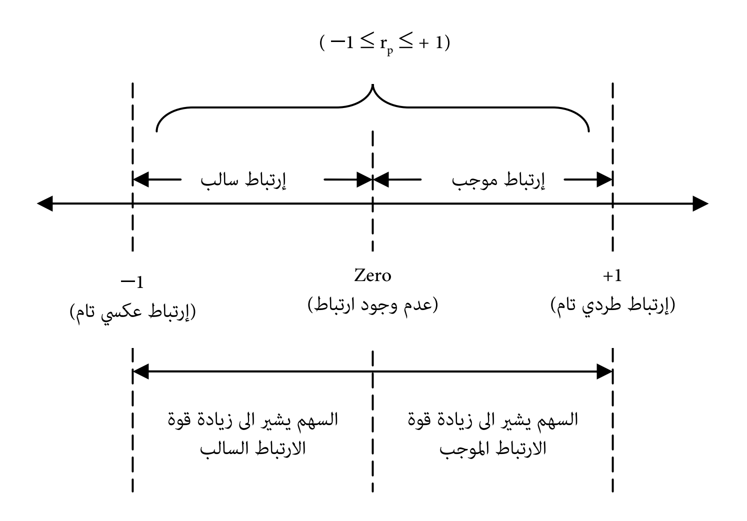
1- إن قيمة معامل الارتباط البسيط (r_p) تقع ضمن المجال $(-1 \leq r_p \leq +1)$ ، إذ إن:

أ- $r_p = +1 \Leftarrow$ تعني إن الارتباط بين المتغيرين طردي وتام.

ب- $r_p = -1 \Leftarrow$ تعني إن الارتباط بين المتغيرين عكسي وتام.

ج- $r_p = 0 \Leftarrow$ تعني إن الارتباط بين المتغيرين معدوم.

والشكل التالي، يوضح ذلك :



2- إن أية تحويلات خطية تجرى على قيم أحد المتغيرين (X) أو (Y) أو كليهما، لا تؤثر على قيمة معامل الارتباط البسيط (r_p) المستخرج للقيم الجديدة.

3- تتأثر قيمة معامل الارتباط البسيط لبيرسون بالقيم الشاذة (Outlier Values) ، مما يتوجب على متخذ القرار، توخي الدقة عند تفسير قيمة هذا المعامل.

مثال (1) :

البيانات التالية تمثل أزواج القيم لاوزان (كغم) خمسة طلاب وأطوالهم (سم).

وزن الطالب (X)	75	72	69	67	63
طول الطالب (Y)	175	170	172	165	162

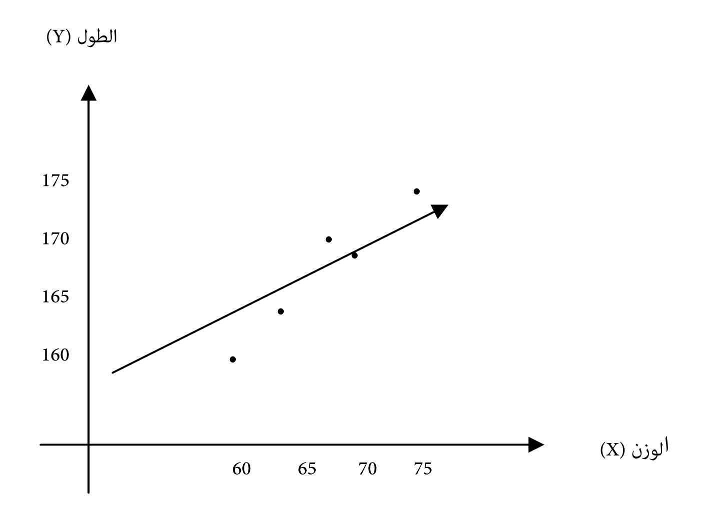
المطلوب:

1- إرسم الشكل الانتشاري (Scatter diagram) لازواج القيم.

2- احسب معامل الارتباط البسيط لبيرسون بين اوزان الطلبة واطوالهم باستخدام صيغة الانحرافات (Deviations) والصيغة البديلة الأولى.

الحل:

1- رسم الشكل الانتشاري :



2- ايجاد معامل الارتباط البسيط لبيرسون :

أ- إستخدام صيغة الانحرافات :

X	Y	$(X-\overline{X})$	$(Y-\overline{Y})$	$(X-\overline{X})(Y-\overline{Y})$	$(X-\overline{X})^2$	$(Y-\overline{Y})^2$
75	175	5.8	6.2	35.96	33.64	38.44
72	170	2.8	1.2	3.36	7.84	1.44
69	172	−0.2	3.2	−0.64	0.04	10.24
67	165	−2.2	−3.8	8.36	4.84	14.44
63	162	−6.2	−6.8	42.16	38.44	46.24
346	844	0	0	89.2	84.8	110.80
$\overline{X} = 69.2$, $\overline{Y} = 168.8$				S_{xy}	S_{xx}	S_{yy}

$$\therefore r_p = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}}\sqrt{S_{yy}}}$$

$$= \frac{89.2}{\sqrt{84.8}\sqrt{110.8}}$$

$$r_p = \frac{89.2}{(9.21)(10.526)}$$

$$= \frac{89.2}{96.944}$$

$$= +0.92$$

يتضح من النتيجة اعلاه، بان العلاقة بين وزن الطالب (X) وطوله (Y) ،علاقة طردية وقويـة جـداً، وهذا يعني بان الزيادة في طول الطالب (Y) ، ستؤدي وبنفس الاتجاه الى زيادة وزنه (X) .

ب- استخدام الصيغة البديلة الأولى :

X	Y	XY	X^2	Y^2
75	175	13125	5625	30625
72	170	12240	5184	28900
69	172	11868	4761	29584
67	165	11055	4489	27225
63	162	10206	3969	26244
346	844	58494	24028	142578
$\overline{X} = 69.2$	$\overline{Y} = 168.8$	$\sum XY$	$\sum X^2$	$\sum Y^2$

نقوم بايجاد قيم كل من [S_{yy} , S_{xx} , S_{xy}] ، على النحو الآتي:

$$S_{xy} = \sum XY - n\overline{X}\,\overline{Y}$$
$$= 58494 - 5\,(69.2)\,(168.8)$$
$$= 89.2$$

$$S_{xx} = \sum X^2 - n\overline{X}^2$$
$$= 24028 - 5\,(69.2)^2$$
$$= 84.8$$

$$S_{yy} = \sum Y^2 - n\overline{Y}^2$$
$$= 142578 - 5\,(168.8)^2$$
$$= 110.8$$

$$\therefore r_p = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}}\sqrt{S_{yy}}}$$

$$= \frac{89.2}{\sqrt{84.8}\sqrt{110.8}}$$

$$= \frac{89.2}{(9.21)(10.526)}$$

$$= \frac{89.2}{96.944}$$

$$= +0.92$$

يتضح من النتيجة أعلاه، بان قيمة معامل الارتباط البسيط (r_p) ، هـي نفسـها في الحـالتين بـالرغم من اختلاف الصيغ التطبيقية لمعامل الارتباط لبيرسون .

مثال (2) :

البيانـات التاليـة، تمثـل ازواج القـيم لمصـاريف الجيـب الاسـبوعية (X) لثمانيـة طـلاب في سـن المراهقة، وعلاماتهم الفصلية (Y) في مساق الرياضيات.

مصروف الطالب (X)	2	4	10	8	2	13	5	12
علامته الفصلية (Y)	97	90	60	55	92	44	82	40

المطلوب :

إحسب معامل الارتباط البسيط لبيرسون، بين مصروف جيب الطالب (X) وعلامته الفصـلية (Y) ، باستخدام الصيغة البديلة الثانية .

الحل :

نقوم بحساب المعلومات التالية ، والموضحة بالجدول الآتي:

X	Y	XY	X^2	Y^2
2	97	194	4	9409
4	90	360	16	8100
10	60	600	100	3600
8	55	440	64	3025
2	92	184	4	8464
13	44	572	169	1936
5	82	410	25	6724
12	40	480	144	1600
56	560	3240	526	42858
$\sum X$	$\sum Y$	$\sum XY$	$\sum X^2$	$\sum Y^2$

نقوم بايجاد قيم كل من [S_{xy} , S_{xx} , S_{yy}] ، على النحو الآتي :

$$\therefore\ S_{xy} = \sum XY - \frac{\left(\sum X\right)\left(\sum Y\right)}{n}$$

$$= 3240 - \frac{(56)(560)}{8}$$

$$= 3240 - 3920$$

$$= -680$$

$$S_{xx} = \sum X^2 - \frac{\left(\sum X\right)^2}{n}$$

$$= 526 - \frac{(56)^2}{8}$$

$$= 526 - 392$$

$$= 134$$

$$S_{yy} = \sum Y^2 - \frac{\left(\sum Y\right)^2}{n}$$

$$= 42858 - \frac{(560)^2}{8}$$

$= 42858 - 39200$

$= 3658$

$$\therefore r_p = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}}\sqrt{S_{yy}}}$$

$$= \frac{-680}{\sqrt{134}\sqrt{3658}}$$

$$= \frac{-680}{(11.576)(60.481)}$$

$$= \frac{-680}{700.128}$$

$$= -0.97$$

يتضح من النتيجة أعلاه، بان العلاقة بين مصروف جيب الطالب (X) ، وعلامته الفصلية (Y) ، علاقة عكسية وقوية جداً، وهذا يعني بأن زيادة مصروف جيب الطالب في سن المراهقة، سيشغله عن الدراسة، مما يؤدي إلى حصوله على علامات واطئة في مساق الرياضيات.

مثال (3) :

أ- إحسب معامل الارتباط البسيط لبيرسون (r_p)، باستخدام الصيغة المناسبة للبيانات التالية، التي تمثل أربعة ازواج من قيم المتغيرين (X) و (Y) .

المتغير (X)	5	1	0	2
المتغير (Y)	6	3	2	5

ب- إحسب معامل الارتباط البسيط لبيرسون (r_p) لازواج قيم المتغيرين (X^*) و (Y^*) ، بعد اجراء التحويل التالي، معلقاً على النتيجة .

$X^* = 3X \quad , \quad Y^* = Y + 2$

الحل :

أ- نقوم بحساب معامل الارتباط البسيط لبيرسون (r_p) للقيم الاصلية للمتغيرين (X) و (Y) ، على النحو الآتي:

X	Y	XY	X^2	Y^2
5	6	30	25	36
1	3	3	1	9
0	2	0	0	4
2	5	10	4	25
8	16	43	30	74
$\overline{X} = 2$	$\overline{Y} = 4$	$\sum XY$	$\sum X^2$	$\sum Y^2$

نقوم بايجاد قيم كل من [S_{yy} , S_{xx} , S_{xy}] ، على النحو الآتي:

$$S_{xy} = \sum XY - n\overline{X}\ \overline{Y}$$
$$= 43 - 4\ (2)\ (4)$$
$$= 43 - 32$$
$$= 11$$

$$S_{xx} = \sum X^2 - n\overline{X}^2$$
$$= 30 - 4\ (2)^2$$
$$= 30 - 16$$
$$= 14$$

$$S_{yy} = \sum Y^2 - n\overline{Y}^2$$
$$= 74 - 4\ (4)^2$$
$$= 74 - 64$$
$$= 10$$

$$\therefore r_p = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}}\sqrt{S_{yy}}}$$
$$= \frac{11}{\sqrt{14}\sqrt{10}}$$

$$r_p = \frac{11}{(3.742)(3.162)}$$

$$= \frac{11}{11.832}$$

$$\approx +0.93$$

يتضح من النتيجة اعلاه ، بان العلاقة بين المتغيرين (X) و (Y) هي علاقة طردية وقوية جداً.

ب- نقوم بحساب معامل الارتباط البسيط لبرسـون (r_p) للقـيم الجديـدة للمتغـيرين (X^*) و (Y^*) والتـي يمكن الحصول عليها من خلال اجراء التحويل التالي، وفقاً للعلاقتين الآتيتين:

$X^* = 3X$

$Y^* = Y + 2$

X^*	Y^*	X^*Y^*	X^{*2}	Y^{*2}
15	8	120	225	64
3	5	15	9	25
0	4	0	0	16
6	7	42	36	49
24	24	177	270	154
$\overline{X}^* = 6$	$\overline{Y}^* = 6$	$\sum X^*Y^*$	$\sum X^{*2}$	$\sum Y^{*2}$

$$\therefore S_{xy} = \sum X^*Y^* - n\overline{X}^*\overline{Y}^*$$

$$= 177 - 4\,(6)\,(6)$$

$$= 33$$

$$S_{xx} = \sum X^{*2} - n\overline{X}^{*2}$$

$$= 270 - 4\,(6)^2$$

$$= 126$$

$$S_{yy} = \sum Y^{*2} - n\overline{Y}^{*2}$$

$$= 154 - 4(6)^2$$

$$= 10$$

$$\therefore r_p = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}}\sqrt{S_{yy}}}$$

$$= \frac{33}{\sqrt{126}\sqrt{10}}$$

$$= \frac{33}{(11.225)(3.162)}$$

$$\approx +0.93$$

يتضح من النتيجة أعلاه، بانها مساوية تماماً إلى نتيجة معامل الارتباط البسيط (r_p) للقيم الاصـلية، مما يؤكد بان قيمة معامل الارتباط البسيط، لا تتأثر بالتحويل المستخدم.

3- إختبار معنوية معامل الارتباط البسيط لبيرسون :

بافتراض إن (r_p) يمثل معامل الارتباط البسـيط لبيرسـون بـين ازواج قـيم المتغـيرين (X) و (Y) ، محسوب على أساس عينة عشوائية قوامها (n) ، فان إختبار معنوية معامل الارتبـاط البسـيط يكـون عـلى نوعين، وكما يأتي:

أولاً: إختبار معنوية معامل الارتباط عن قيمة مفترضة ($\rho = \rho_0$) :

لاختبار معنوية معامل الارتبـاط البسـيط لبيرسـون (r) في هـذه الحالـة، نقـوم باختبـار إحـدى الفرضيات الاحصائية الثلاث، الآتية :

أ- الاختبار ذو جانبين : Two – tailed Test

$$H_0 : \rho = \rho_0$$
$$H_1 : \rho \neq \rho_0$$

ب- الاختبار ذو جانب علوي : Upper – tailed Test

$$H_0 : \rho \leq \rho_0$$
$$H_1 : \rho > \rho_0$$

ج- الاختبار ذو جانب سفلي : Lower – tailed Test

$$H_0 : \rho \geq \rho_0$$
$$H_1 : \rho < \rho_0$$

حيث إن :

ρ : تمثل معامل الارتباط البسيط بين المتغيرين (X) و (Y) في المجتمع.

ρ_0 : تمثل قيمة مفترضة غير مساوية للصفر .

إن إحصاءة الاختبار الملائمة للفرضيات الاحصائية السابقة، تأخذ الشكل الآتي:

$$Z_{cal.} = \frac{W - E(W)}{\sqrt{Var(W)}} \sim N(0,1)$$

حيث إن :

$$W = \frac{1}{2} Ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right)$$

$$E(W) = \frac{1}{2} Ln\left(\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}\right)$$

$$Var\ (W) = \frac{1}{n-3}$$

ولاتخاذ القرار الاحصائي حول رفض او عدم رفض فرضية العدم (Ho) ، يتم مقارنة القيمة المطلقة لاحصاءة الاختبار المحسوبة ($|Z_{cal.}|$) مع القيمة الجدولية ($Z_{tab.}$) ، إعتماداً على مستوى المعنوية (α) ، ونوع الفرضية البديلة (H_1) . والجدول التالي، يوضح بعض القيم الجدولية الشائعة الاستخدام لـ (Z) التي تخضع للتوزيع الطبيعي المعياري [N(0,1)] .

الفرضية البديلة(H_1)	$H_1 : \rho > \rho_0 , \rho < \rho_0$	$H_1 : \rho \neq \rho_0$
α	Z_{α}	$Z_{\frac{\alpha}{2}}$
10%	1.282	1.645
5%	1.645	1.960
1%	2.326	2.576

القرار الاحصائي:

أ- يتم قبول فرضية العدم (H_0) ، عندما تكون القيمة المطلقة لاحصاءة الاختبار المحسوبة اقل من القيمة الجدولية، أي إن [$| Z_{cal.} | < Z_{tab.}$] ، وهذا يعني إن العينة قد اختيرت من مجتمع فيه ($\rho = \rho_0$) وفق معطيات العينة، عند مستوى المعنوية (α).

ب- يتم رفض فرضية العدم (H_0) ، عندما تكون القيمة المطلقة لاحصاءة الاختبار المحسوبة اكبر من أو تساوي القيمة الجدولية، أي إن [$|Z_{cal.}| \geq Z_{tab.}$] ، وهذا يعني إن العينة لم يتم اختيارها من مجتمع فيه ($\rho = \rho_0$) وفق معطياتها، عند مستوى المعنوية (α).

مثال (4) :

إذا كانت قيمة معامل الارتباط البسيط لبيرسون (r_p) ، بين متغيري الوزن (X) والطول (Y) لخمسة طلاب، مساوية الى ($r_p = 0.92$) .

المطلوب:

هل يمكن القول بان هذه العينة قد اختيرت من مجتمع فيه معامل الارتباط البسيط بين المتغيرين مساوٍ الى (0.95) ، عند مستوى المعنوية ($\alpha = 1\%$) ؟

الحل:

للاجابة عن السؤال اعلاه، نقوم باختبار الفرضية الآتية :

$$H_0 : \rho = 0.95$$

$$H_1 : \rho \neq 0.95$$

نقوم بايجاد إحصاءة الاختبار (Z) ، وفقاً للصيغة الآتية :

$$Z_{cal.} = \frac{W - E(W)}{\sqrt{Var(W)}}$$

عليه فان :

$$W = \frac{1}{2} Ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right)$$

$$= \frac{1}{2} Ln\left(\frac{1+0.92}{1-0.92}\right)$$

$$W = \frac{1}{2}Ln(24)$$

$$= 1.589$$

$$E(W) = \frac{1}{2}Ln\left(\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}\right)$$

$$= \frac{1}{2}Ln\left(\frac{1+0.95}{1-0.95}\right)$$

$$= \frac{1}{2}Ln(39)$$

$$= 1.832$$

$$Var\ (W) = \frac{1}{n-3}$$

$$= \frac{1}{5-3}$$

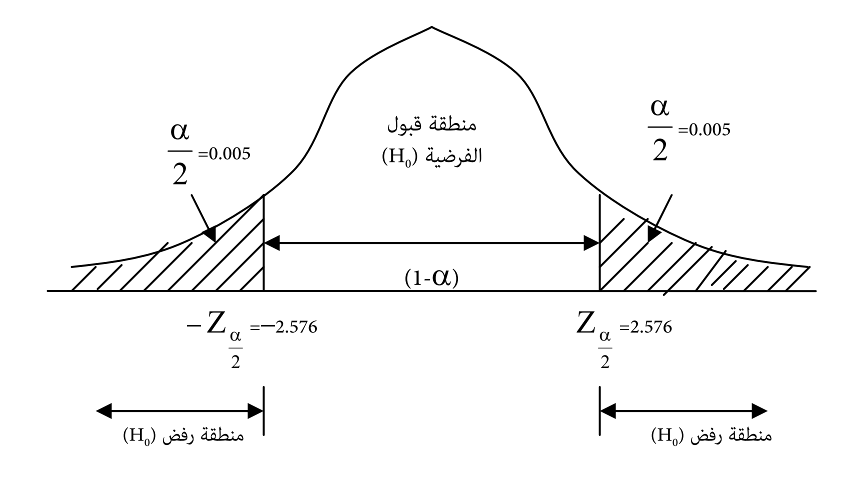
$$= 0.5$$

$$\therefore Z_{cal.} = \frac{1.589-1.832}{\sqrt{0.5}}$$

$$= \frac{-0.243}{0.707}$$

$$= -0.344$$

بمـا إن الاختبـار ذو جـانبين، تحـت مسـتوى المعنويـة ($\alpha = 0.01$) ، لـذا سـيتم اختيـار $\left(\frac{\alpha}{2} = 0.005\right)$ لكـل جانـب، وبالتـالي فـان القـيم الجدوليـة تكـون $\left(Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.576\right)$ و $\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} = -2.576\right)$ والشكل التالي يوضح مناطق رفض وقبول فرضية العدم (H_0) :



القرار الاحصائي:

بما إن القيمة المطلقة لاحصاءة الاختبار ($|Z_{cal.}|$) البالغة (0.344)، هي اقل من القيمة الجدولية $\left(Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.576 \right)$، وهذا يعني قبول فرضية العدم (H_0) ، مما يدل ذلك بأن العينة قد أختيرت من مجتمع فيه معامل الارتباط البسيط بين المتغيرين مساوٍ الى (ρ =0.95) وفق معطيات العينة، عند مستوى المعنوية (α = 1%) .

مثال (5) :

إذا كان معامل الارتباط البسيط لبيرسون (r_p) بين متغيري الدخل الشهري (X) والانفاق الاسري (Y) ، محسوب على أساس عينة عشوائية من الأسر قوامها (150) أسرة، مساوٍ إلى (r_p = 0.85) .

المطلوب:

هل يمكن القول بان هذه العينة قد اختيرت من مجتمع فيه معامل الارتباط البسيط بين المتغيرين لا يزيد على (0.81) عند مستوى المعنوية (α=10%) ؟

الحل:

للاجابة عن السؤال اعلاه، نقوم باختبار الفرضية الآتية :

$H_0 : \rho \leq 0.81$

$H_1 : \rho > 0.81$

نقوم بحساب إحصاءة الاختبار (Z) وفقاً للصيغة الآتية :

$$Z_{cal.} = \frac{W - E(W)}{\sqrt{Var(W)}}$$

عليه فان :

$$W = \frac{1}{2} Ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right)$$

$$= \frac{1}{2} Ln\left(\frac{1+0.85}{1-0.85}\right)$$

$$= 1.256$$

$$E(W) = \frac{1}{2} Ln\left(\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}\right)$$

$$= \frac{1}{2} Ln\left(\frac{1+0.81}{1-0.81}\right)$$

$$= 1.127$$

$$Var(W) = \frac{1}{n-3}$$

$$= \frac{1}{150-3}$$

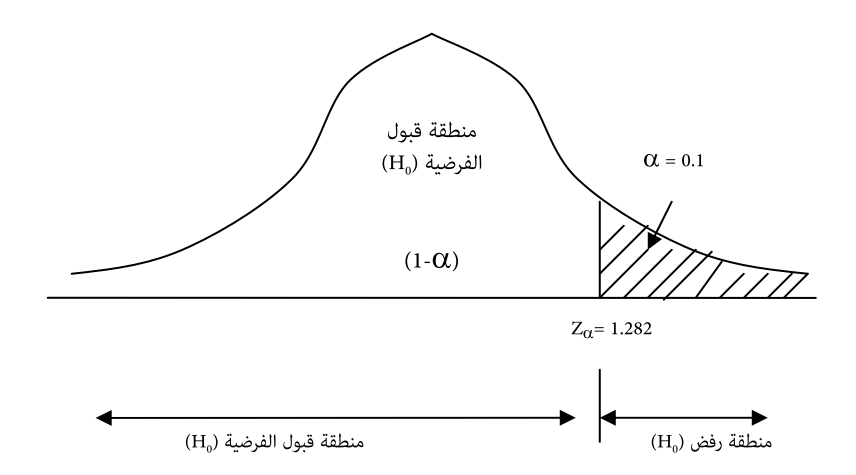
$$= 0.0068$$

$$\therefore Z_{cal.} = \frac{1.256 - 1.127}{\sqrt{0.0068}}$$

$$= \frac{0.129}{0.082}$$

$$= 1.573$$

بما إن الاختبار من جانب واحد، عليه فان القيمة الجدولية تكون ($Z_\alpha = 1.282$) ، عند مستوى المعنوية ($\alpha = 10\%$) ، والشكل التالي يوضح مناطق رفض وقبول فرضية العدم (H_0) .



القرار الاحصائي :

بما إن القيمة المطلقة لاحصاءة الاختبار ($|Z_{cal.}|$) البالغة (1.573) هي اكبر من القيمة الجدولية ($Z_\alpha = 1.282$) ، فهذا يعني رفض فرضية العدم (H_0) ، مما يدل ذلك بان العينة قد اختيرت من مجتمع فيه معامل الارتباط البسيط بين المتغيرين يزيد على (0.81)، بمعنى إن ($\rho>0.81$) وفق معطيات العينة، عند مستوى المعنوية (10%).

ثانياً: إختبار معنوية معامل الارتباط عن الصفر ($\rho = 0$) :

لاختبار معنوية معامل الارتباط البسيط لبيرسون (r_p) في هذه الحالة، نقوم باختبار احدى الفرضيات الاحصائية الثلاث الآنفة الذكر، ومنها على وجه التحديد الفرضية الاحصائية الآتية:

$$H_0 = \rho = 0$$

$$H_1 = \rho \neq 0$$

إن إحصاءة الاختبار الملائمة للفرضية أعلاه، تأخذ الشكل الآتي:

$$t_{cal.} = r * \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}} \sim t_{(n-2)}$$

حيث إن :

r : تمثل معامل الارتباط البسيط لبيرسون.

n : تمثل ازواج قيم المتغيرين (X) و (Y) .

ولاتخاذ القرار الاحصائي حول رفض او عدم رفض فرضية العدم (H_0) ، يتم مقارنة القيمة المطلقة لاحصاءة الاختبار المحسوبة ($|t_{acl.}|$) مع القيمة الجدولية ($t_{tab.}$) ، التي يتم الحصول عليها من جداول توزيع (t) ، اعتماداً على درجات الحرية (n—2) ومستوى المعنوية (α) ونوع الفرضية البديلة (H_1) .

القرار الاحصائي :

أ- يتم قبول فرضية العدم (H_0) ، عندما تكون القيمة المطلقة لاحصاءة الاختبار المحسوبة اقل من القيمة الجدولية، أي إن [$|t_{cal.}| < t_{(n-2)}$] ، مما يدل ذلك على عدم وجود علاقة معنوية بين المتغيرين، وفق معطيات العينة، عند مستوى المعنوية (α) .

ب- يتم رفض فرضية العدم (H_0) ، عندما تكون القيمة المطلقة لاحصاءة الاختبار المحسوبة اكبر من أو تساوي القيمة الجدولية، أي إن [$|t_{cal.}| \geq t_{(n-2)}$] ، مما يدل ذلك على وجود علاقة معنوية بين المتغيرين، وفق معطيات العينة، عند مستوى المعنوية (α) .

مثال (6) :

إذا كان معامل الارتباط البسيط لبيرسون (r_p) ، بين مصروف جيب الطالب (X) وعلامته الفصلية (Y) في مساق الرياضيات، محسوب على أساس عينة عشوائية من الطلاب قوامها (8) طلاب، مساوٍ إلى ($r_p = -0.97$)

المطلوب :

هل إن قيمة معامل الارتباط البسيط المحسوبة، تدل على وجود علاقة معنوية بين المتغيرين، وفق معطيات العينة، عند مستوى المعنوية ($\alpha = 0.05$) ؟

الحل :

للاجابة عن السؤال اعلاه، نقوم باختبار الفرضية الآتية :

$H_0 : \rho = 0$

$H_1 : \rho \neq 0$

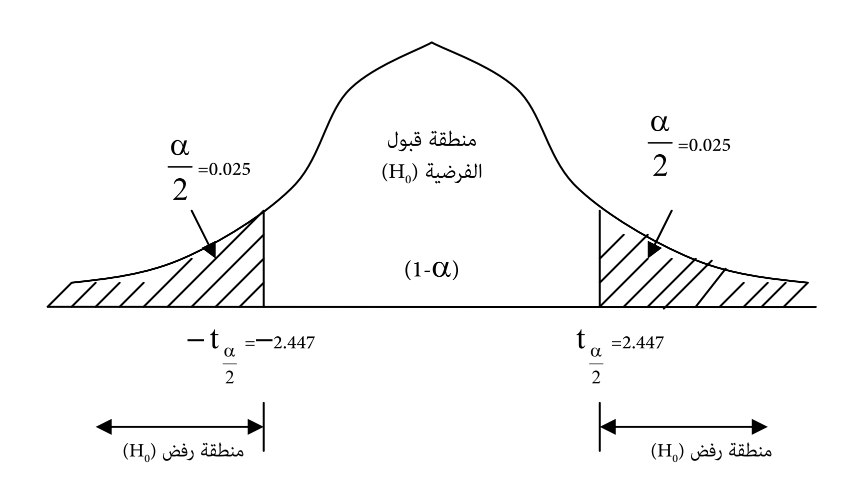
نقوم بحساب إحصاءة الاختبار (t) ، وفقاً للصيغة الآتية :

$$t_{cal.} = r * \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$$

$$= (-0.97) * \sqrt{\frac{8-2}{1-(-0.97)^2}}$$

$$= -9.774$$

بما إن الاختبار ذو جانبين، تحت مستوى المعنوية ($\alpha = 0.05$) ، لذا سيتم اختيار $\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ لكل جانب، وبالتالي فان قـيم (t) الجدوليـة، تكـون $\left(t_{\frac{\alpha}{2}} = 2.447\right)$ و $\left(-t_{\frac{\alpha}{2}} = -2.447\right)$ بدرجـة حريـة (6)، والشكل التالي يوضح مناطق رفض وقبول فرضية العدم (H_0) :



القرار الاحصائي:

بما إن القيمة المطلقة لاحصاءة الاختبار المحسوبة ($|t_{cal.}|$) البالغة (9.774)، هي أكبر من القيمة الجدولية البالغة (2.447) ، وهذا يعني رفض فرضية العدم (H_0) ، مما يدل على وجود علاقة معنوية بين المتغيرين، أي إن ($\rho \neq 0$) وفق معطيات العينة، عند مستوى المعنوية ($\alpha = 0.05$) .

4-5 : إرتباط الرتب : Ranks Correlation

في الفقرات السابقة تم توضيح مفهوم الارتباط الخطي البسيط، وأهم الصيغ المستخدمة في حساب معامل الارتباط البسيط لبيرسون بهدف قياس العلاقة الارتباطية بين متغيرين من النوع الكمي، أي (يمكن قياسهما كمياً)، إلا إنه في بعض الاحيان يكون المتغيرين من النوع الوصفي، أي (لا يمكن قياسهما كمياً) من الناحية العملية، مما يتعذر علينا استخدام صيغ معامل الارتباط البسيط لبيرسون لقياس العلاقة بين المتغيرين الوصفيين، لذا نلجأ إلى إجراء بعض التحويرات على المتغيرين الوصفيين، وتتلخص هذه التحويرات باستخدام الرتب (Ranks) بدلاً من القيم الاصلية، توضع مقابل قيم المتغيرين الوصفيين بعد أن يتم ترتيب قراءات كل منهما تصاعدياً أو تنازلياً كل على إنفراد، مع مراعاة أخذ متوسط الرتب في حالة وجود قراءات متكررة تحمل نفس الصفة للمتغير الوصفي.

وتكون معاملات إرتباط الرتب على نوعين مهمين، هما:

أ- معامل إرتباط الرتب لسبيرمان Spearman's Rank Correlation Coefficient

ب- معامل إرتباط الرتب لكندال Kendall's Rank Correlation Coefficient

وسيتم التركيز بشكل مفصل في هذا الكتاب على دراسة معامل إرتباط الرتب لسبيرمان، لأهميته في قياس العلاقة الارتباطية بين متغيرين من النوع الوصفي، ولكونه أكثر شيوعاً واستخداماً من معامل إرتباط الرتب لكندال.

أ- معامل إرتباط الرتب لسبيرمان :

وهو مؤشر إحصائي يستخدم لقياس العلاقة الارتباطية بين متغيرين وصفيين، أي (لا يمكن قياسهما كمياً)، مثال ذلك، قياس العلاقة بين مستوى ذكاء الطالب (X) ومستوى ادائه العلمي (Y) ، أو قياس العلاقة بين متغيرين أحدهما وصفي وآخر كمي، كما يمكن استخدامه لقياس العلاقة بين متغيرين كميين، إلا إنه يفضل في هذه الحالة استخدام معامل الارتباط البسيط لبيرسون، لدقته كونه يتعامل مع القيم الاصلية وليس الرتب.

عند ايجاد معامل ارتباط الرتب لسبيرمان (Spearman) ، يتم اولاً اعطاء رتب (Ranks) مقابلة لقيم المتغيرات الوصفية أو الكمية بعد أن يتم ترتيب القراءات تصاعدياً أو تنازلياً لكل متغير كل على انفراد، مع مراعاة أخذ متوسط الرتب في حالة وجود قراءات تحمل نفس الصفة للمتغير الوصفي أو تأخذ نفس القيمة بالنسبة للمتغير الكمي.

ويُعد معامل إرتباط الرتب لسبيرمان من اكثر معاملات إرتباط الرتب شيوعاً واستخداماً، والصيغة العامة لمعامل إرتباط الرتب لسبيرمان، تأخذ الشكل الآتي:

$$r_s = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n(n^2 - 1)}$$

حيث إن:

n : عدد أزواج القيم (Y_i , X_i) لكلا المتغيرين.

d_i : الفرق بين رتب المتغير (X_i) ورتب المتغير (Y_i) ، أي إن $[d_i = R_x - R_y]$.

مثال (7) :

البيانات التالية، تمثل معدلات ثمانية طلاب في التوجيهي (X_i) وتقديراتهم في الجامعة (Y_i) :

معدل الطالب في التوجيهي (X_i)	59	72	61	80	86	82	90	67
تقدير الطالب في الجامعة (Y_i)	مقبول	جيد	متوسط	جيد	جيد جداً	جيد	إمتياز	مقبول

المطلوب:

قياس العلاقة الارتباطية بين معدل الطالب في التوجيهي (X_i) ، وتقديره في الجامعة (Y_i)، باستخدام معامل ارتباط الرتب لسبيرمان.

الحل:

نقوم بحساب المعلومات التالية، والموضحة بالجدول الآتي:

X_i	Y_i	Rank (X_i)	Rank (Y_i)	$d_i=R_x - R_y$	d_i^2
59	مقبول	1	1.5	−0.5	0.25
72	جيد	4	5	−1	1
61	متوسط	2	3	−1	1
80	جيد	5	5	0	0
86	جيد جداً	7	7	0	0
82	جيد	6	5	+1	1
90	إمتياز	8	8	0	0
67	مقبول	3	1.5	+1.5	2.25
-	-	-	-	0	5.5
					$\sum d_i^2$

$$\therefore r_s = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n(n^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6(5.5)}{8(64-1)}$$

$$= 1 - \frac{33}{504}$$

$$= 1 - 0.07$$

$$= +0.93$$

من النتيجة اعلاه، يتضح بان العلاقة بين معدل الطالـب في التـوجيهي (X_i) ، وتقـديره في الجامعـة (Y_i) ، هي علاقة طردية وقوية جداً، وهذا يعني بان الطالب عنـدما يكـون متفوقـاً في مرحلـة التـوجيهي، سيقود ذلك الى تفوقه في الدراسة الجامعية.

ب- خصائص معامل إرتباط الرتب لسبيرمان :

يتصف معامل إرتباط الرتب لسبيرمان، بالخصائص الآتية :

1- يُستخدم معامل إرتباط الرتب لسبيرمان، لقياس العلاقة الارتباطية بين المتغيرات الوصفية، ويمكن إستخدامه احياناً لقياس العلاقة بين المتغيرات الكمية، بعد التعبير عن القيم الأصلية للمتغيرين بدلالة الرتب (Ranks) .

2- يعد معامل إرتباط الرتب لسبيرمان، سهل الحساب والفهم والتطبيق مقارنة بمعامل الارتباط البسيط لبيرسون.

3- إن قيمة معامل إرتباط الرتب لسبيرمان، تقع ضمن المجال $(-1 \le r_s \le +1)$، إذ إن:

أ- عندما يكون $\left(\sum d_i^2 = 0\right) \Leftarrow$ فان $(r_s = +1)$.

ب- عندما يكون $\left[6\sum d_i^2 = 2n(n^2 - 1)\right] \Leftarrow$ فان $(r_s = -1)$.

ج- عندما يكون $\left[6\sum d_i^2 = n(n^2 - 1)\right] \Leftarrow$ فان $(r_s = 0)$.

4- إن قيمة معامل إرتباط الرتب لسبيرمان المحسوبة في حالة المتغيرات الكمية، لا تساوي بالضبط قيمة معامل الارتباط البسيط لبيرسون، وذلك بسبب التعامل مع رتب القيم وليس مع القيم الاصلية للمتغيرين.

5- إن معامل إرتباط الرتب لسبيرمان مشتق من معامل الارتباط البسيط لبيرسون، بعد التعبير عن القيم الاصلية للمتغيرين بدلالة الرتب.

ج- إختبار معنوية معامل إرتباط الرتب لسبيرمان :

بافتراض إن (r_s) يمثل معامل إرتباط الرتب لسبيرمان بين أزواج قيم متغيرين وصفيين، أو احدهما كمي والآخر وصفي، محسوب على أساس عينة عشوائية قوامها (n)، فان اختبار معنوية معامل ارتباط الرتب لسبيرمان يكون على ثلاثة أشكال، وعلى النحو الآتي:

أولاً: الاختبار الرتبي اللامعلمي :

يستخدم الاختبار الرتبي اللامعلمي، لاختبار معنوية معامل ارتباط الرتب لسبيرمان (r_s) ، عندما يكون عدد أزواج قيم المتغيرين (X) و (Y) ، تتراوح بين ($5 \leq n \leq 30$) ، وتوجد جداول خاصة لهذا الاختبار، وسيتم شرح هذا الاختبار بشيء من التفصيل في الفصل السابع الخاص بالاختبارات اللامعلمية.

ثانياً: إختبار (t) :

يمكن إختبار معنوية معامل إرتباط الرتب لسبيرمان (r_s) ، باستخدام إختبار (t) عندما يكون عدد أزواج قيم المتغيرين (X) و (Y) ، تتراوح بين ($10 \leq n \leq 30$)، ويتم ذلك من خلال اختبار الفرضية الاحصائية الآتية :

$H_0 : \rho_s = 0$

$H_1 : \rho_s \neq 0$

إن إحصاءة الاختبار الملائمة للفرضية أعلاه، تعطى بالصيغة الآتية :

$$t_{cal.} = r * \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}} \sim t_{(n-2)}$$

مثال (8):

إذا كان معامل إرتباط الرتب لسبيرمان (r_s) ، بين معدل الطالب في التوجيهي (X) وتقديره في الجامعة (Y) للسنة الاولى، محسوب على اساس عينة عشوائية قوامها (20) طالب، مساوٍ الى ($r_s = 0.95$) .

المطلوب:

أختبر معنوية معامل إرتباط الرتب لسبيرمان (r_s) عند مستوى المعنوية ($\alpha = 1\%$) .

الحل:

لاختبار معنوية معامل ارتباط الرتب لسبيرمان (r_s) ، نقوم باختبار الفرضية الاحصائية الآتية:

$H_0 : \rho_s = 0$

$H_1 : \rho_s \neq 0$

نقوم بحساب إحصاءة الاختبار (t) ، وفقاً للصيغة الآتية :

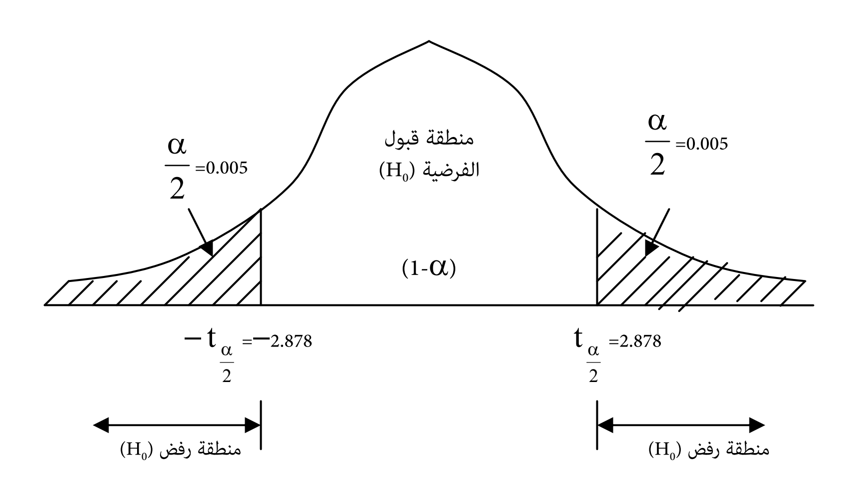
$$t_{cal.} = r * \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$$

$$= 0.95 * \sqrt{\frac{20-2}{1-(0.95)^2}}$$

$$= 0.95 * (13.587)$$

$$= 12.908$$

من جداول توزيع (t) بدرجة حرية (18) ومستوى المعنوية (0.01) ، فان قيم (t) الجدولية هـي $\left(t_{\frac{\alpha}{2}} = 2.878\right)$ و $\left(-t_{\frac{\alpha}{2}} = -2.878\right)$ ، والشكل التالي، يوضح مناطق رفض وقبـول فرضـية العـدم (H_0) :



القرار الاحصائي:

بما إن القيمة المطلقة لاحصاءة الاختبـار المحسـوبة ($|t_{cal.}|$) البالغـة (12.908) ، هـي اكـبر مـن القيمة الجدولية $\left(t_{\frac{\alpha}{2}} = 2.878\right)$ ، مما يدل ذلك عـلى رفـض فرضـية العـدم (H_0) ، وهـذا يعنـي بانـه توجد علاقة معنوية بين المتغيرين، أي إن $(\rho_s \neq 0)$ وفق معطيات العينة، عند مستوى المعنوية (1%) .

ثالثاً: إختبار (Z) :

يستخدم إختبار (Z)، لاختبار معنوية معامل إرتباط الرتب لسبيرمان (r_s) ، عندما يكون عدد أزواج قيم المتغيرين (X) و (Y) ، أكثر من (30) زوج، أي إن ($n > 30$) وفي هذه الحالة يكون توزيع معامل إرتباط الرتب لسبيرمان (r_s) ، يقترب من التوزيع الطبيعي بمتوسط (ρ_s=0) وتباين مساوٍ إلى $\left(\frac{1}{n-1}\right)$ أي إن $\left[r_s \sim N\left(0, \frac{1}{n-1}\right)\right]$

ولاختبار معنوية معامل إرتباط الرتب لسبيرمان، نقوم باختبار الفرضية الاحصائية الآتية:

$H_0 : \rho_s = 0$

$H_1 : \rho_s \neq 0$

إن إحصاءة الاختبار الملائمة للفرضية اعلاه ، تأخذ الشكل الآتي:

$$Z_{cal.} = \frac{r_s - E(r_s)}{\sqrt{Var(r_s)}} \sim N(0, 1)$$

$$= r_s * \sqrt{n-1}$$

مثال (9) :

إذا كان معامل إرتباط الرتب لسبيرمان (r_s) ، بين متغيري المؤهل العلمي (X) ومستوى الأداء (Y) لموظفي احدى المؤسسات التربوية، محسوب على أساس عينة عشوائية قوامها (50) منتسب، مساوٍ إلى ($r_s = 0.9$) .

المطلوب:

أختبر معنوية معامل إرتباط الرتب لسبيرمان (r_s) ، عند مستوى المعنوية (α=5%).

الحل:

لاختبار معنوية معامل إرتباط الرتب لسبيرمان (r_s) ، نقوم باختبار الفرضية الاحصائية الآتية:

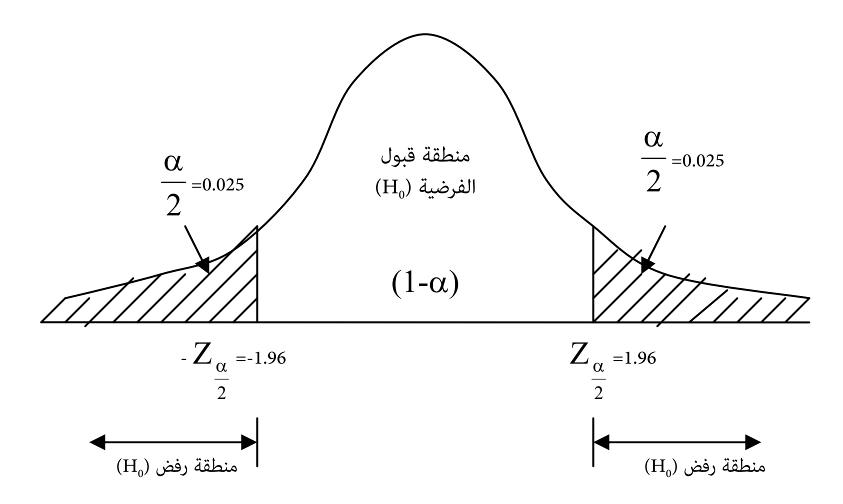
$H_0 : \rho_s = 0$

$H_1 : \rho_s \neq 0$

نقوم بحساب إحصاءة الاختبار (Z) وفقاً للصيغة الآتية :

$$Z_{cal.} = r_s * \sqrt{n-1}$$
$$= 0.9 * \sqrt{50-1}$$
$$= 0.9 * (7)$$
$$= 6.3$$

بما إن الاختبار ذو جانبين، تحت مستوى المعنوية (0.05)، عليه فان القيم الجدولية تكون $\left(Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96\right)$ و $\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} = -1.96\right)$ ، والشكل التالي، يوضح مناطق رفض وقبول فرضية العدم (H_0) :



القرار الاحصائي:

بما إن القيمة المطلقة لاحصاءة الاختبار المحسوبة ($|Z_{cal.}|$) البالغة (6.3) ، هي أكبر من القيمة الجدولية $\left(Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96\right)$ ، مما يدل ذلك على رفض فرضية العدم (Ho) ، وهذا يعني بانه توجد علاقة معنوية بين المتغيرين، أي إن $(\rho_s \neq 0)$ وفق معطيات العينة، عند مستوى المعنوية (5%) .

5-5 إرتباط الصفات : Attributes Correlation

يقترن مفهوم إرتباط الصفات بوجود توزيع تكرار ثنائي (مزدوج) لمتغيرين وصـفيين، أو احـدهما كمـي والآخـر وصـفي، ويطلـق عـلى هـذا النـوع مـن التوزيعـات التكراريـة المزدوجـة بجـداول التوافـق (Contengency Tables) .

ولتوضيح مفهوم إرتباط الصفات، دعنا نفترض وجود توزيع تكـراري مـزدوج لمتغـيرين وصـفيين، صفوف هذا التوزيع البالغ عددها (n) ، تمثل تصنيفات المتغير (X)، أما اعمدة التوزيع البالغ عـددها (m) ، فانها تمثل تصنيفات المتغير (Y) . والجدول التالي يوضح الشكل العام لجدول التوافق من نوع (n x m) :

المتغير (Y) / المتغير (X)	Y_1	Y_2	....	Y_j	....	Y_m	المجموع
X_1	O_{11}	O_{12}	....	O_{1j}	....	O_{1m}	$T_{1.}$
X_2	O_{21}	O_{22}	....	O_{2j}	....	O_{2m}	$T_{2.}$
:	:	:	....	:	....	:	:
:	:	:		:		:	:
X_i	O_{i1}	O_{i2}	....	O_{ij}	....	O_{im}	$T_{i.}$
:	:	:	....	:	....	:	:
:	:	:		:		:	:
X_n	O_{n1}	O_{n2}	....	O_{nj}	....	O_{nm}	$T_{n.}$
المجموع	$T_{.1}$	$T_{.2}$	....	$T_{.j}$	....	$T_{.m}$	T

$(i= 1, 2, \ldots, n)$, $(j = 1, 2, \ldots, m)$

حيث إن :

n : عدد صفوف الجدول أو عدد تصنيفات المتغير (X) .

m : عدد أعمدة الجدول أو عدد تصنيفات المتغير (Y) .

O_{ij} : التكرار المشاهد، ويعرف بانه التكرار المشترك الفعلي للتصنيف (i) للمتغير (X) مع التصـنيف (j) للمتغير (Y) .

$T_{i.}$: مجموع التكرارات المشاهدة للتصنيف (i) للمتغير (X) ، ولجميع تصنيفات المتغير (Y) .

$T_{.j}$: مجموع التكرارات المشاهدة للتصنيف (j) للمتغير (Y) ، ولجميع تصنيفات المتغير (X) .

T : مجموع التكرارت المشاهدة الكلية في جدول التوافق.

ولقياس العلاقة بين المتغيرين الوصفيين المصنفين في جدول توافق، هناك عدة مؤشرات إحصائية تدعى "بمعاملات إرتباط الصفات" نذكر منها:

1- معامل التوافق (r_c)	Contengency Coefficient
2- معامل فاي (ϕ)	Phi Coefficient
3- معامل كريمر (V)	Gramer Coefficient
4- معامل الاقتران (r_A)	Association Coefficient
5- معامل الربط (r_c)	Colligation Coefficient
6- معامل الاقتران (λ)	Goodman & Kruskal Coefficient

وسيتم التركيز في هذا الكتاب على دراسة معامل التوافق (r_c) ومعامل فاي (ϕ)، بشيء من التفصيل، لكونهما من اكثر معاملات ارتباط الصفات الاخرى شيوعاً واستخداماً، وعلى النحو الآتي:

1- معامل التوافق (r_c) : Contengency Coefficient

أ- تعريفه وطريقة حسابه :

وهو مؤشر إحصائي يستخدم لقياس العلاقة بين متغيرين وصفيين مصنفين في جدول توافق من نوع (n x m) ، ويسمى احياناً بمعامل الارتباط بين الصفات.

ويُعد معامل التوافق (r_c) ، من اكثر معاملات إرتباط الصفات شيوعاً واستخداماً، لشموليته ودقته، ويمكن ايجاده وفقاً للصيغة الآتية :

$$r_c = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + T}}$$

حيث إن:

χ^2 : تمثل إحصاءة مربع كاي (Chi-square) .

T : تمثل مجموع التكرارات المشاهدة في جدول التوافق.

قبل القيام بحساب معامل التوافق (r_c) ، لابد من حساب قيمة إحصاءة مربع كاي (χ^2)، وفقاً للصيغة الآتية :

$$\chi^2 = \sum_{i}^{n}\sum_{j}^{m}\frac{\left(O_{ij} - E_{ij}\right)^2}{E_{ij}}$$

حيث إن :

O_{ij} : تمثل التكرار المشاهد (Observed frequency) .

E_{ij} : تمثل التكرار المتوقع (Expected frequency) .

ويعرف التكرار المتوقع (E_{ij}) :

بانه "التكرار المشترك المتوقع للتصنيف (i) للمتغير (X) ، مع التصنيف (j) للمتغير (Y)"

وبشكل عام، يمكن ايجاد التكرار المتوقع (E_{ij}) ، وفقاً للعلاقة الآتية :

$$E_{ij} = \frac{T_{i.} * T_{.j}}{T}$$

على أن يقترن ذلك، بان يكون مجموع التكرارات المشاهدة الفعلية في جدول التوافق، مساوٍ الى مجموعات التكرارات المتوقعة، وتساوي مجموع التكرارات الكلية في الجدول (T) ، أي إن :

$$\sum_{i}^{n}\sum_{j}^{m} O_{ij} = \sum_{i}^{n}\sum_{j}^{m} E_{ij} = T$$

مثال (10) :

جدول التوزيع التكراري المزدوج التالي، يبين حالة الجو (Y) وعدد الحوادث (X)، التي حصلت على أحد الطرق الخارجية في العراق، خلال فترة زمنية معينة :

نوع الحادث (X) \ حالة الجو (Y)	غائم	عواصف	ممطر	المجموع
إنقلاب	10	25	15	50
اصطدام	15	40	35	90
المجموع	25	65	50	140

المطلوب:

قياس العلاقة بين نوع الحادث (X) وحالة الجو (Y)، باستخدام معامل التوافق (r_c) .

الحل:

لحساب معامل التوافق (r_c) نتبع الخطوات الآتية :

1- حساب التكرارات المتوقعة (E_{ij}) لجميع خلايا جدول التوافق السابق، وفقاً للعلاقة الآتية:

$$E_{ij} = \frac{T_{i.} * T_{.j}}{T}$$

فعلى سبيل المثال، التكرار المتوقع (E_{11}) يمكن حسابه على النحو الآتي:

$$E_{11} = \frac{T_{1.} * T_{.1}}{T}$$

$$= \frac{50 * 25}{140}$$

$$= 8.9$$

وبنفس الاسلوب، يمكن حساب بقية التكرارات المتوقعة لخلايا جدول التوافق.

2- تثبيت التكرارات المتوقعة (E_{ij}) المستخرجة بالخطوة (1)، على أصل جدول التوافق ووضعها بين أقواس، لتمييزها عن التكرارات المشاهدة (O_{ij}) ، بعد التحقق من إن:

$$\sum_{i}^{2}\sum_{j}^{3} O_{ij} = \sum_{i}^{2}\sum_{j}^{3} E_{ij} = 140$$

حالة الجو (Y) / نوع الحادث (X)	غائم	عواصف	ممطر	المجموع
إنقلاب	10(8.9)	25(23.2)	15(17.9)	50(50)
اصطدام	15(16.1)	40(41.8)	35(32.1)	90(90)
المجموع	25(25)	65(65)	50(50)	140(140)

3- حساب قيمة إحصاءة مربع كاي (χ^2)، وفقاً للصيغة الآتية :

$$\chi^2 = \sum_{i}^{2}\sum_{j}^{3}\frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$$

$$= \left[\frac{(10-8.9)^2}{8.9} + \frac{(25-23.2)^2}{23.2} + \frac{(15-17.9)^2}{17.9} + \frac{(15-16.1)^2}{16.1} + \frac{(40-41.8)^2}{41.8} + \frac{(35-32.1)^2}{32.1}\right]$$

$$= 1.16$$

4- حساب معامل التوافق (r_c) ، وفقاً للصيغة الآتية:

$$r_c = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + T}}$$

$$= \sqrt{\frac{1.16}{1.16 + 140}}$$

$$= 0.091$$

يتضح من النتيجة اعلاه، بان العلاقة بين نوع الحادث (X) وحالة الجو (Y)، تُعد ضعيفة جداً، ويبدو بانها معدومة بين المتغيرين (X) و (Y) .

ب- خصائص معامل التوافق :

يتصف معامل التوافق (r_c) ، بالخصائص الآتية :

1- إن قيمة معامل التوافق (r_c) تتراوح بين (0 ، 1) أي إن ($0 \le r_c \le 1$) ، إذ إن :

أ- عندما يكون الفرق بين التكرار المشاهد (O_{ij}) والتكرار المتوقع (E_{ij}) لكل خلية من خلايا جدول التوافق مساوٍ (للصفر) $\Leftarrow$ فان قيمة مربع كاي (χ^2) ستكون مساوية (للصفر) أي إن ($\chi^2 = 0$) ، وبالتالي فان ($r_c = 0$) .

ب- عندما يكون الفرق بين التكرار المشاهد (O_{ij}) والتكرار المتوقع (E_{ij}) لكل خلية من خلايا جدول التوافق (كبير جداً) $\Leftarrow$ فان قيمة مربع كاي (χ^2) ستؤول الى المالانهاية، أي إن ($\chi^2 \to \infty$) وبالتالي فان ($r_c = 1$) .

2- لا يمكن أن تكون قيمة معامل التوافق (r_c) ، قيمة سالبة (Negative) ، وذلك بسبب إعتماد معامل التوافق (r_c) عند احتسابه، على إحصاءة مربع كاي (χ^2)، ومن المعلوم إن قيمة مربع كاي موجبة دائماً، أي إن ($\chi^2 \ge 0$) .

3- إن مجموع التكرارات المشاهدة يساوي مجموع التكرارات المتوقعة في كل صف وكل عمود، وكليهما تساوي مجموع التكرارات الكلية (T) في جدول التوافق، أي إن:

$$\sum_{i}^{n}\sum_{j}^{m} O_{ij} = \sum_{i}^{n}\sum_{j}^{m} E_{ij} = T$$

2- معامل فاي (ϕ) : Phi Coefficient

وهو مؤشر إحصائي، يستخدم لقياس العلاقة بين متغيرين وصيفين مصنفين في جداول التوافق من نوع (n x m) ، أو في جداول الاقتران من نوع (2 x 2) .

ويمكن حساب معامل فاي (ϕ) ، وفقاً للصيغة الآتية :

$$\phi = \sqrt{\frac{\chi^2}{T}}$$

حيث إن :

χ^2 : تمثل إحصاءة مربع كاي (Chi-square) .

T : تمثل مجموع التكرارات المشاهدة في جدول التوافق أو جدول الاقتران.

من الصيغة اعلاه، يتضح بان معامل فاي (ϕ) ، يعتمد كلياً على قيمة إحصاءة مربع كاي (χ^2) عند احتسابه، وفيما يلي أهم الصيغ المستخدمة في ايجاد قيمة الاحصاءة (χ^2) وفقاً لنوع الجدول، وعلى النحو الآتي:

أ- في حالة جداول التوافق من نوع (n x m) ، فان :

$$\chi^2 = \sum_{i}^{n}\sum_{j}^{m}\frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$$

ب- في حالة جداول الاقتران من نوع (2 x 2) ، فان :

$$\chi^2 = \frac{T * (O_{11} * O_{22} - O_{12} * O_{21})^2}{T_{1.} * T_{2.} * T_{.1} * T_{.2}}$$

مثال (11) :

جدول التوزيع التكراري المزدوج التالي، يبين توزيع (100) طالب، موزعين حسب جنس الطالب (X) ووزنه (Y) .

الوزن (Y) / الجنس (X)	أقل من 60	80-60	80 فاكثر	المجموع
ذكور (M)	10	25	20	55
إناث (Fe)	15	20	10	45
المجموع	25	45	30	100

المطلوب:

قياس العلاقة بين جنس الطالب (X) ووزنه (Y) ، باستخدام معامل فاي (ϕ) .

الحل:

لحساب معامل فاي (ϕ) نتبع الخطوات الآتية :

1- حساب التكرارات المتوقعة (E_{ij}) لجميع خلايا جدول التوافق السابق، وفقاً للعلاقة الآتية:

$$E_{ij} = \frac{T_{i,} * T_{,j}}{T}$$

فعلى سبيل المثال، التكرار المتوقع (E_{23}) ، يمكن حسابه على النحو الآتي:

$$E_{23} = \frac{T_{2.} * T_{.3}}{T}$$

$$= \frac{45 * 30}{100}$$

$$= 13.5$$

وبنفس الاسلوب، يمكن حساب بقية التكرارات المتوقعة (E_{ij}) لخلايا جدول التوافق .

2- تثبيت التكرارات المتوقعة (E_{ij}) المستخرجة بالخطوة (1) على أصل جدول التوافق، وعلى النحو الآتي:

الوزن (Y) / الجنس (X)	أقل من 60	80-60	80 فاكثر	المجموع
ذكور (M)	(13.75)10	(24.75)25	(16.5)20	(55)55
إناث (Fe)	(11.25)15	(20.25)20	(13.5)10	(45)45
المجموع	(25)25	(45)45	(30)30	(100)100

3- حساب قيمة إحصاءة مربع كاي (χ^2) ، وفقاً للصيغة الآتية :

$$\chi^2 = \sum_{i}^{2}\sum_{j}^{3}\frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$$

$$= \left[\frac{(10-13.75)^2}{13.75} + \frac{(25-24.75)^2}{24.75} + \frac{(20-16.5)^2}{16.5} + \frac{(15-11.25)^2}{11.25} + \frac{(20-20.25)^2}{20.25} + \frac{(10-13.5)^2}{13.5}\right]$$

$$= 3.928$$

4- حساب معامل التوافق (ϕ) ، وفقاً للصيغة الآتية:

$$\phi = \sqrt{\frac{\chi^2}{T}}$$
$$= \sqrt{\frac{3.928}{100}}$$
$$= \sqrt{0.03928}$$
$$= 0.198$$

يتضح من نتيجة معامل فاي (ϕ) ، بان العلاقة بين جنس الطالب (X) ووزنه (Y)، تعد ضعيفة.

6-5 : الانحدار : The Regression

يُعد الانحدار مـن المواضيع الاساسية وجـزءاً مهـماً مـن النظرية الاحصائية، ويتميـز الانحـدار باستخداماته الواسعة في مختلف العلوم الطبيعية والادارية والاقتصادية، فعـلى سـبيل المثـال لا الحصرـ في المجال الاقتصادي، يُعد الانحدار الاداة العلمية التحليلية في الاقتصاد الكلي التحليلي، والقيـاس الاقتصـادي، إذ يمكن استخدامه للتعبير عن العلاقات التي تربط المتغيرات الاقتصادية فيما بينها، بصيغة نمـاذج رياضـية يطلق عليها بـ (نماذج الانحدار)، ومن ثم تقدير معلمات هذه النماذج، واعتمادهـا لاغـراض عمليـة التنبـؤ باحد المتغيرات باعتباره متغيراً تابعـاً (Dependent Variable) عنـد مسـتويات محـددة لمتغـيرات اخـرى يطلق عليها بالمتغيرات المستقلة (Independent Variables).

إن اول مـن اسـتخدم مفهـوم الانحـدار هـو العـالم الانكليـزي "فرانسـيس كَـالتون" (Francis Galton) ، (1822-1911) ، وعلى وجه التحديد في التطبيقات البايولوجية، بهدف اكتشاف بعض العلاقـات فيما بين المتغيرات البايولوجية.

وبصورة عامة، يعرف الانحدار بانه: "إسلوب رياضي لتقدير العلاقة بين متغيرين او اكثر، بدلالـة وحدات قياس المتغيرات المعتمدة (التابعة) في العلاقة"، وغالباً ما تسمى هـذه العلاقـات بـنماذج الانحـدار (Regression Models) .

يمكن تقسيم الانحدار من حيث التحليل (Analysis) الى قسمين مهمين هما:

أ- الانحدار الخطي   Linear Regression

ب- الانحدار غير الخطي   Non-Linear Regression

وسيتم التركيز في هذا الكتاب على النوع الأول المتمثل بالانحدار الخطي بشيء من التفصيل، لاهميته في تقدير العلاقة الخطية بين متغيرين او اكثر، وعلى النحو الآتي:

7-5 : الانحدار الخطي :   Linear Regression

إن الهدف الرئيسي من تحليل الانحدار الخطي هو تقدير العلاقة الرياضية الخطية التي تربط بين متغيرين او اكثر.

وفي دراسة تحليل الانحدار، يوجد نوعين من المتغيرات ، هما :

أ- المتغير التابع : Dependent Variable

وهو المتغير الذي تتأثر قيمته في حالة تغير قيمة المتغير المستقل أو (المتغيرات المستقلة)، ولا يتأثر او تتأثر به.

ب- المتغير المستقل (المتغيرات المستقلة): Independent Variable (s)

وهو المتغير الذي يؤثر في قيمة المتغير التابع عند تغيره، ولا يتأثر بالمتغير التابع، ويسمى احياناً بالمتغير التفسيري (Explanatory Variable) .

ويكون الانحدار الخطي على نوعين اساسيين، اعتماداً على عدد المتغيرات الداخلة في النموذج الرياضي للانحدار، هما:

1- الانحدار الخطي البسيط   Simple Linear Regression

2- الانحدار الخطي المتعدد Multiple Linear Regression

وفيما يلي شرحاً مفصلاً عن الانحدار الخطي البسيط فقط، وعلى النحو الآتي:

5-7-1 : الانحدار الخطي البسيط : Simple Linear Regression

يعرف الانحدار الخطي البسيط، بانه: "عملية تقدير العلاقة الخطية بين متغيرين فقط، أحدهما متغيراً (مستقلاً)، والآخر متغيراً (تابعاً)" .

وعلى فرض إن نموذج الانحدار الخطي البسيط، يأخذ الشكل الآتي:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i \quad , \quad i = 1, 2, 3, \ldots\ldots, n \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

حيث إن:

Y_i : يمثل المتغير التابع (Dependent Variable) .

X_i : يمثل المتغير المستقل (Independent Variable) .

β_0, β_1 : يمثل معلمات النموذج (Parameters of Model) .

β_0 : يمثل معامل التقاطع (Intercept Coefficient) .

β_1 : يمثل معامل الانحدار (Regression Coefficient) .

ε_i : يمثل حد الخطأ العشوائي (Random Error Term) .

ويتصف حد الخطأ العشوائي، بالافتراضات الآتية :

a) $E(\varepsilon_i) = 0$

b) $Var(\varepsilon_i) = \sigma^2$

c) $Cov(\varepsilon_i , \varepsilon_j) = 0 \quad , \quad (\forall\ i \neq j)$

5-7-2 : تقدير معلمات نموذج الانحدار الخطي البسيط $\left(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0\right)$:

إن الهدف من تحليل الانحدار الخطي البسيط، هو تقدير قيم عددية لمعلمات نموذج الانحدار الخطي البسيط $\left(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0\right)$.

ولتحقيق هذا الغرض نقوم بتطبيق طريقة المربعات الصغرى (Least Squares) التي تجعل مجموع مربعات الاخطاء $\left(\sum_{i}^{n} \varepsilon_i^2\right)$ اقل ما يمكن (Minimum) . ويمكن الحصول على الاخطاء او البواقي من خلال طرح القيم التقديرية $\left(\hat{Y}_i\right)$ من القيم الفعلية (Y_i) ، أي إن:

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

من المعادلة رقم (2) ، يمكن الحصول على مجموع مربعات الاخطاء، كالآتي:

$$\sum_{i}^{n} e_i^2 = \sum_{i}^{n}\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2 \qquad \text{..................} (3)$$

إن تطبيق طريقة المربعات الصغرى (LS) على المعادلة رقم (3) ، تنطوي علـى تحديـد كـل مـن $(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0)$ التي تجعل مجموع مربعات الاخطاء $\left(\sum_{i}^{n} e_i^2\right)$ اقل ما يمكن (Minimum) وعلى النحو الآتي :

$$\sum_{i}^{n} e_i^2 = \sum_{i}^{n}\left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \text{Minimize} \qquad \text{.............} (4)$$

وباجراء التفاضل الجزئي على المعادلة رقم (4) بالنسبة للمعلمتين $(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0)$ ، نحصل على :

$$\frac{\partial \sum_{i}^{n} e_i^2}{\partial \hat{\beta}_0} = -2\sum_{i}^{n}\left(Y - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i\right) = 0 \qquad \text{..............} (5)$$

$$\frac{\partial \sum_{i}^{n} e_i^2}{\partial \hat{\beta}_1} = -2\sum_{i}^{n}\left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i\right)\left(X_i\right) = 0 \qquad \text{................} (6)$$

وبتبسـيط العلاقتـين رقـم (5) و (6) نحصـل عـلى المعـادلتين الطبيعيتـين (Two Normal Equations) ، على النحو الآتي:

$$\sum_{i}^{n} Y_i = n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum_{i}^{n} X_i \qquad \text{...................} (7)$$

$$\sum_{i}^{n} X_i Y_i = \hat{\beta}_0 \sum_{i}^{n} X_i + \hat{\beta}_1 \sum_{i}^{n} X_i^2 \qquad \text{..................} (8)$$

وبحل المعادلتين الطبيعيتين الواردة بالعلاقتين (7) و (8) حلاً آنياً او بـالتعويض المبـاشر، نحصـل على القيم التقديرية للمعلمتين $(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0)$ ، على الوجه الآتي:

$$\hat{\beta}_0 = \overline{Y} - \hat{\beta}_1 \overline{X} \qquad \text{.........................} \quad (9)$$

وبتعويض قيمة $\left(\hat{\beta}_0\right)$ في المعادلة (8) ، وبعد التبسيط نحصل على قيمة $\left(\hat{\beta}_1\right)$ التقديرية، كالآتي:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i}^{n} X_i Y_i - n\overline{X}\,\overline{Y}}{\sum_{i}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2} \qquad \text{.........................} \quad (10)$$

إن العلاقة رقم (10) يمكن كتابتها بالشكل الآتي:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} \qquad \text{.........................} \quad (11)$$

وبتعويض القيم التقديرية للمعلمات $\left(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0\right)$ في نموذج الانحدار الخطي البسيط الوارد بالعلاقة رقم (1)، نحصل على معادلة خط الانحدار التنبؤية (Forecasting Equation) وعلى الوجه الآتي:

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i \qquad \text{.........................} \quad (12)$$

حيث إن :

$\hat{\beta}_0$: بُعد نقطة تقاطع خط الانحدار مع الاحداثي الصادي، عن نقطة الأصل.

$\hat{\beta}_1$: معامل الانحدار، أو ميل خط الانحدار (Slope) .

ويعرف معامل الانحدار $\left(\hat{\beta}_1\right)$ ، بانه:

"مؤشر إحصائي يفسر مقدار التغير الذي يطرأ على المتغير التابع (Y_i) ، إذا ما تغير المتغير المستقل (X_i) بوحدة واحدة" .

مثال (12) :

البيانات التالية، تمثل متوسط الدخل الشهري (X) ومتوسط الانفاق الشهري (Y) لخمسة عوائل :

متوسط الدخل الشهري (X)	200	320	480	260	620
متوسط الانفاق الشهري (Y)	180	240	310	160	400

المطلوب:

1- تقدير معلمات نموذج الانحدار الخطي البسيط $\left(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0\right)$.

2- التنبؤ بمتوسط الانفاق الشهري $\left(\hat{Y}\right)$ لعائلة ما، متوسط دخلها الشهري (780) دينار أردني.

الحل:

1- تقدير معلمات النموذج $\left(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0\right)$:

X	Y	XY	X^2
200	180	36000	40000
320	240	76800	102400
480	310	148800	230400
260	160	41600	67600
620	400	248000	384400
1880	1290	551200	824800
$\overline{X} = 376$	$\overline{Y} = 258$	$\sum XY$	$\sum X^2$

$$\therefore S_{xy} = \sum XY - n\overline{X}\,\overline{Y}$$
$$= 551200 - 5(376)\,(258)$$
$$= 66160$$

$$S_{xx} = \sum X^2 - n\overline{X}^2$$
$$= 824800 - 5(376)^2$$
$$= 117920$$

$$\therefore \hat{\beta}_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$$
$$= \frac{66160}{117920}$$
$$\approx 0.561$$

$$\therefore \hat{\beta}_0 = \overline{Y} - \hat{\beta}_1 \overline{X}$$
$$= 258 - 0.561\ (376)$$
$$= 47.064$$

وبتعويض القيم التقديرية $(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0)$ في نموذج الانحدار الخطي البسيط، سنحصل على النموذج التنبؤي الآتي :

$$\because\ \hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i$$
$$\therefore\ \hat{Y}_i = 47.064 + 0.561\ X_i \implies \text{Forecasting Model}$$

2- التنبؤ بمتوسط الانفاق الشهري $(\hat{Y}_i)$ لعائلة دخلها الشهري (780) دينار :

$$\because\ \hat{Y}_i = 47.064 + 0.561\ Xi$$
$$\therefore\ \hat{Y}_i = 47.064 + 0.561 * (780)$$
$$= 484.644 \quad \text{JD}$$

النتيجة اعلاه، تشير إلى إن العائلة التي دخلها الشهري (780) دينار أردني، سيكون متوسط إنفاقها الشهري المتنبأ به ($\hat{Y}_i$) مساوٍ إلى (484.644) دينار أردني.

3-7-5 : مؤشرات إختبار جودة توفيق نموذج الانحدار الخطي البسيط :

هناك عدد من المؤشرات الاحصائية، التي يمكن استخدامها لاختبار جودة توفيق نموذج الانحدار الخطي البسيط، نذكر منها:

1- معامل التحديد (R^2) : Determination Coefficient

يستخدم معامل التحديد (R^2) بشكل عام، لتقرير ما تفسره المتغيرات المستقلة من تغيرات تطرأ على قيم المتغير التابع. ويطلق على معامل التحديد أحياناً بـ (معامل التفسير).

وبناءاً على ما تقدم، يُعرف معامل التحديد (R^2) بانه "مؤشر إحصائي يوضح مقدار ما يفسره المتغير المستقل (X_i) من تغير في المتغير التابع (Y_i) " . وتتراوح قيمة معامل التحديد بين (0 ، 1) أي إن $(0 \le R^2 \le 1)$.

ويمكن ايجاد قيمة معامل التحديد (R^2) وفقاً للصيغة الآتية :

$$R^2 = \frac{S_{xy}^2}{S_{xx} * S_{yy}} \qquad \text{.............................. (13)}$$

2- الخطأ المعياري للتقدير $\left(SE_{\hat{Y}}\right)$: Standard Error of Estimation

يُعرف الخطأ المعياري للتقدير $\left(SE_{\hat{Y}}\right)$ بانه: "الجذر التربيعي لمجموع مربعات انحرافات القيم الحقيقية (Y_i) عن القيم التقديرية $\left(\hat{Y}_i\right)$ مقسوماً على (n-2) " أي إن :

$$SE_{\hat{Y}} = \sqrt{\frac{\sum_{i}^{n}\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2}{n-2}} \Rightarrow \text{(الصيغة التعريفية)} \qquad \text{.................. (14)}$$

وبتبسيط صيغة التعريف اعلاه، يمكن الحصول على صيغة بديلة لاحتساب الخطأ المعياري للتقدير $\left(SE_{\hat{Y}}\right)$ ، التي تُعد اكثر سهولة من الناحية التطبيقية، وهي :

$$SE_{\hat{Y}} = \sqrt{\frac{\sum Y_i^2 - \hat{\beta}_0 \sum Y_i - \hat{\beta}_1 \sum X_i Y_i}{n-2}} \qquad \text{.................. (15)}$$

3- إختبار (F) : F-test

يُستخدم اختبار (F) للتحقق من معنوية نموذج الانحدار الخطي البسيط ككل من عدم معنويته، ولتحقيق هذا الغرض لابد من إختبار الفرضيتين الآتيتين:

H_0 : The model doesn't significant .
H_1 : The model is significant .

إن إحصاءة الاختبار الملائمة للفرضية أعلاه، تأخذ الشكل الآتي:

$$F_{cal.} = \frac{R^2 / K - 1}{(1 - R^2) / n - K} \sim F_{[k-1, n-k]} \qquad \text{............... (16)}$$

حيث إن :

R^2 : يمثل معامل التحديد .

K : تمثل عدد المتغيرات في النموذج .

n : تمثل عدد ازواج قيم المتغيرين (X) و (Y) .

القرار الاحصائي :

أ- يتم قبول فرضية العدم (H_0) ، عندما تكون إحصاءة الاختبار $(F_{cal.})$ المحسوبة، أقل من القيمة الجدولية، أي إن [$F_{cal.} < F_{tab.}$] ، مما يدل على عدم معنوية نموذج الانحدار الخطي البسيط ككل .

ب- يتم رفض فرضية العدم (H_0) ، عندما تكون إحصاءة الاختبار $(F_{cal.})$ المحسوبة، اكبر من أو تساوي القيمة الجدولية، أي إن [$F_{cal.} \geq F_{tab.}$] ، مما يدل على معنوية نموذج الانحدار الخطي البسيط ككل .

4- إختبار (t) : t-test

يُستخدم إختبار (t) للتحقق من معنوية معلمات نموذج الانحدار الخطي البسيط $(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0)$ كل على إنفراد، وعلى النحو الآتي:

أ- إختبار معنوية معامل التقاطع $(\hat{\beta}_0)$:

للتحقق من معنوية معامل التقاطع $(\hat{\beta}_0)$ الخاص بنموذج الانحدار الخطي البسيط، لابد من إختبار الفرضيتين الآتيتين :

$H_0 : \beta_0 = 0$

$H_1 : \beta_0 \neq 0$

إن إحصاءة الاختبار للفرضية اعلاه ، تأخذ الشكل الآتي :

$$t_{cal.} = \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{SE_{\hat{\beta}_0}} \sim t_{(n-2)} \qquad \text{................ (17)}$$

حيث إن :

$\hat{\beta}_0$: تمثل القيمة التقديرية للمعلمة (β_0) .

$SE_{\hat{\beta}_0}$: يمثل الخطأ المعياري للمعلمة المقدرة $(\hat{\beta}_0)$.

ويمكن ايجاد الخطأ المعياري للمعلمة المقدرة $\left(\hat{\beta}_0\right)$ ، وفقاً للصيغة الآتية :

$$SE_{\hat{\beta}_0} = SE_{\hat{Y}} * \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{S_{xx}}} \qquad \text{.................. (18)}$$

القرار الاحصائي :

أ- يتم قبول فرضية العدم (H_0) ، عندما تكون القيمة المطلقة لاحصاءة الاختبار المحسوبة $(|t_{cal.}|)$ أقل من القيمة الجدولية، أي إن $[\ |t_{cal.}| < t_{(n-2)}\ ]$ ، مما يدل على عدم معنوية معامل التقاطع $\left(\hat{\beta}_0\right)$.

ب- يتم رفض فرضية العدم (H_0) ، عندما تكون القيمة المطلقة لاحصاءة الاختبار المحسوبة $(|t_{cal.}|)$ أكبر من أو تساوي القيمة الجدولية، أي إن $[\ |t_{cal.}| \geq t_{(n-2)}\ ]$ ، مما يدل على معنوية معامل التقاطع $\left(\hat{\beta}_0\right)$ ، بمعنى إن معامل التقاطع لم يكن مساوٍ للصفر، أي إن (معادلة خط الانحدار لم تمر بنقطة الأصل) .

ب- إختبار معنوية معامل الانحدار $\left(\hat{\beta}_1\right)$:

للتحقق من معنوية معامل الانحدار $\left(\hat{\beta}_1\right)$ الخاص بنموذج الانحدار الخطي البسيط، والذي يسمى احياناً بميل خط الانحدار (Slope) لابد من إختبار الفرضيتين الآتيتين:

$H_0 : \beta_1 = 0$

$H_1 : \beta_1 \neq 0$

إن إحصاءة الاختبار للفرضية اعلاه ، تأخذ الشكل الآتي :

$$t_{cal.} = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{SE_{\hat{\beta}_1}} \sim t_{(n-2)} \qquad \text{................. (19)}$$

حيث إن :

$\hat{\beta}_1$: تمثل القيمة التقديرية للمعلمة (β_1) .

$SE_{\hat{\beta}_1}$: يمثل الخطأ المعياري للمعلمة المقدرة $\left(\hat{\beta}_1\right)$.

ويمكن ايجاد الخطأ المعياري للمعلمة المقدرة $\left(\hat{\beta}_1\right)$ ، وفقاً للصيغة الآتية :

$$SE_{\hat{\beta}_1} = SE_{\hat{Y}} * \sqrt{\frac{1}{S_{xx}}} \qquad \text{………………….. (20)}$$

القرار الاحصائي :

أ- يتم قبول فرضية العدم (H_0) ، عندما تكون القيمة المطلقة لاحصاءة الاختبار المحسوبة $(|t_{cal.}|)$ أقل من القيمة الجدولية، أي إن $[\,|t_{cal.}| < t_{(n-2)}\,]$ ، مما يدل على عدم معنوية معامل الانحدار $(\hat{\beta}_1)$.

ب- يتم رفض فرضية العدم (H_0) ، عندما تكون القيمة المطلقة لاحصاءة الاختبار المحسوبة $(|t_{cal.}|)$ أكبر من أو تساوي القيمة الجدولية، أي إن $[\,|t_{cal.}| \geq t_{(n-2)}\,]$ ، مما يدل على معنوية معامل الانحدار $(\hat{\beta}_1)$ ، بمعنى إن معامل الانحدار لا يساوي صفراً .

مثال (13) :

البيانات التالية، تمثل مصروف الجيب الاسبوعي (X) لثمانية طلاب في سن المراهقة، وعلاماتهم الفصلية (Y) في مساق الرياضيات :

مصروف الطالب (X)	2	4	10	8	2	13	5	12
علامته الفصلية (Y)	97	90	60	55	92	44	82	40

المطلوب:

1- تقدير معلمات نموذج الانحدار الخطي البسيط $(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0)$.
2- حساب معامل التحديد (R^2)، مفسراً النتيجة .
3- ايجاد قيمة الخطأ المعياري للتقدير $(SE_{\hat{Y}})$.
4- اختبار معنوية نموذج الانحدار، مستخدماً $(\alpha=0.01)$.
5- اختبار معنوية معلمات النموذج $(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0)$ مستخدماً $(\alpha=0.05)$.
6- تقدير علامة الطالب $(\hat{Y}_i)$ إذا كان مصروفه الاسبوعي (6) دنانير .

الحل :

1- تقدير معلمات النموذج $\left(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0\right)$:

X	Y	XY	X^2	Y^2
2	97	194	4	9409
4	90	360	16	8100
10	60	600	100	3600
8	55	440	64	3025
2	92	184	4	8464
13	44	572	169	1936
5	82	410	25	6724
12	40	480	144	1600
56	560	3240	526	42858
$\overline{X} = 7$	$\overline{Y} = 70$	$\sum XY$	$\sum X^2$	$\sum Y^2$

$$\therefore S_{xy} = \sum XY - n\overline{X}\,\overline{Y}$$
$$= 3240 - 8(7)(70)$$
$$= -680$$

$$S_{xx} = \sum X^2 - n\overline{X}^2$$
$$= 526 - 8(7)^2$$
$$= 134$$

$$\therefore \hat{\beta}_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$$
$$= \frac{-680}{134}$$
$$= -5.075$$

$$\therefore \hat{\beta}_0 = \overline{Y} - \hat{\beta}_1 \overline{X}$$
$$= 70 - (-5.075)(7)$$
$$= 105.525$$

عليه يكون النموذج التنبؤي (التقديري)، على النحو الآتي:

$$\because \hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i$$

$$\therefore \hat{Y}_i = 105.525 - 5.075\ X_i \implies \text{Forecasting Model}.$$

2- حساب معامل التحديد (R^2) :

$$\because R^2 = \frac{S^2_{xy}}{S_{xx} * S_{yy}}$$

نقوم بايجاد (S_{yy}) أولاً، كالآتي :

$$S_{yy} = \sum Y^2 - n\overline{Y}^2$$
$$= 42858 - 8(70)^2$$
$$= 3658$$

$$\therefore R^2 = \frac{(-680)^2}{134 * 3658}$$
$$= 0.943$$

يتضح من خلال قيمة معامل التحديد (R^2) البالغة (0.943)، بان المتغير المستقل المتمثل بمصروف الطالب الاسبوعي (X) ، يفسر ما نسبته (94.3%) من التغيرات التي تطرأ على قيم المتغير التابع المتمثل بعلامة الطالب الفصلية (Y) في مساق الرياضيات، اما النسبة المتبقية والبالغة (5.7%) فانها تعود الى متغيرات اخرى لم تدخل في نموذج الانحدار الخطي البسيط قيد الدراسة.

وبناءاً على ما تقدم، يتضح بان قيمة معامل التحديد (R^2) قريبة جداً من الواحد الصحيح، وهذه النتيجة تدل على جودة توفيق نموذج الانحدار البسيط لبيانات الظاهرة المدرسة، وإن نموذج الانحدار قد مثلَّ الظاهرة أفضل تمثيل.

3- إيجاد الخطأ المعياري للتقدير ($SE_{\hat{Y}}$) :

يمكن إيجاد قيمة الخطأ المعياري للتقدير ($SE_{\hat{Y}}$) وفقاً لاحدى الطريقتين الآتيتين:

أ- طريقة البواقي (الصيغة التعريفية):

$\because \hat{Y}_i = 105.525 - 5.075\, X_i$

X_i	Y_i	$\hat{Y}_i$	$e_i = Y_i - \hat{Y}_i$	$e_i^2 = \left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2$
2	97	95.375	1.625	2.6406
4	90	85.225	4.775	22.8006
10	60	54.775	5.225	27.3006
8	55	64.925	−9.925	98.5056
2	92	95.375	−3.375	11.3906
13	44	39.550	4.450	19.8025
5	82	80.150	1.850	3.4225
12	40	44.625	−4.625	21.3906
-	-	-	Zero	207.2536

$\sum\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2$

$$\therefore SE_{\hat{Y}} = \sqrt{\frac{\sum\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2}{n-2}}$$

$$= \sqrt{\frac{207.2536}{8-2}}$$

$$= \sqrt{34.5423}$$

$$\approx 5.877$$

ب- طريقة القيم الاصلية (الصيغة البديلة):

$\because \quad \sum Y_i = 560 \quad , \quad \sum Y_i^2 = 42858 \quad , \quad n = 8$

$\sum X_i Y_i = 3240 \quad , \quad \hat{\beta}_0 = 105.525 \quad , \quad \hat{\beta}_1 = -5.075$

$$\therefore SE_{\hat{Y}} = \sqrt{\frac{\sum Y_i^2 - \hat{\beta}_0 \sum Y_i - \hat{\beta}_1 \sum X_i Y_i}{n-2}}$$

$$= \sqrt{\frac{42858 - (105.525)(560) - (-5.075)(3240)}{8-2}}$$

$$= \sqrt{\frac{42858 - 59094 + 16443}{6}}$$

$$= \sqrt{\frac{207}{6}}$$

$$= \sqrt{34.5}$$

$$\approx 5.874$$

تُعد قيمة الخطأ المعياري للتقدير $(SE_{\hat{Y}})$ المستخرجة لبيانات الظاهرة المدروسة، صغيرة، مـما يدل ذلك على جودة تقدير معلمات نموذج الانحدار، التي تجعل النمـوذج يتمتـع بكفـاءة عاليـة لاغـراض عملية التنبؤ بقيم الظاهرة.

4- إختبار معنوية نموذج الانحدار :

للتحقق من معنوية نموذج الانحدار الخطي البسيط، نقوم باختبار الفرضيتين الاتيتين:

H_0 : The model doesn't significant .

H_1 : The model is significant .

يتم حساب إحصاءة الاختبار (F) ، وفقاً للصيغة الآتية :

$$F_{cal.} = \frac{R^2 / K-1}{(1-R^2)/n-K}$$

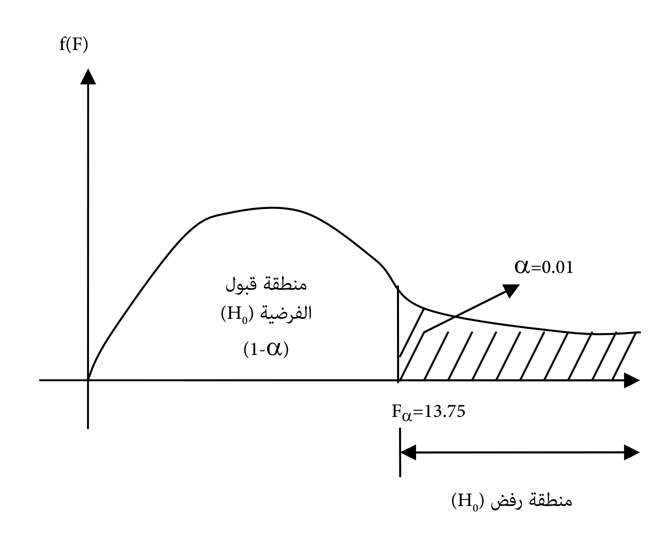
$\because\ R^2 = 0.943 \quad , \quad K = 2 \quad , \quad n = 8$

$$\therefore F_{cal.} = \frac{0.943/(2-1)}{(1-0.943)/8-2}$$

$$= \frac{0.943}{0.0095}$$

$$= 99.263$$

من جداول توزيع (F) بدرجتي حرية (1، 6) عند مستوى المعنوية (α =0.01) ، نحصل على قيمة (F) الجدولية البالغة (13.75)، والشكل التالي، يوضح منطقة قبول ورفض فرضية العدم (H_0) :



القرار الاحصائي :

بما إن قيمة (F) المحسوبة البالغة (99.263)، هي اكبر من قيمة (F) الجدولية (F_{α}=13.75) ، وهذا يعني رفض فرضية العدم (H_0)، مما يدل على معنوية نموذج الانحدار الخطي البسيط، وبالتالي فان النموذج يمثل العلاقة بين المتغيرين (X) و (Y) أفضل تمثيل .

5- **إختبار معنوية معلمات النموذج $(\hat{\beta}_1, \beta_0)$:**

أ- **إختبار معنوية معامل التقاطع $(\hat{\beta}_0)$:**

للتحقق من معنوية معامل التقاطع $(\hat{\beta}_0)$ ، نقوم باختبار الفرضيتين الآتيتين :

$H_0 : \beta_0 = 0$

$H_1 : \beta_0 \neq 0$

قبل البدء بحساب إحصاءة الاختبار (t) ، نقوم أولاً بحساب $(SE_{\hat{\beta}_0})$ كالآتي:

$$\because \; SE_{\hat{Y}} = 5.874 \quad , \quad \overline{X} = 7 \quad , \quad n = 8 \quad , \quad S_{xx} = 134$$

$$\therefore SE_{\hat{\beta}_0} = SE_{\hat{Y}} * \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{S_{xx}}}$$

$$= 5.874 * \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{(7)^2}{134}}$$

$$= 5.874 * (0.7)$$

$$= 4.112$$

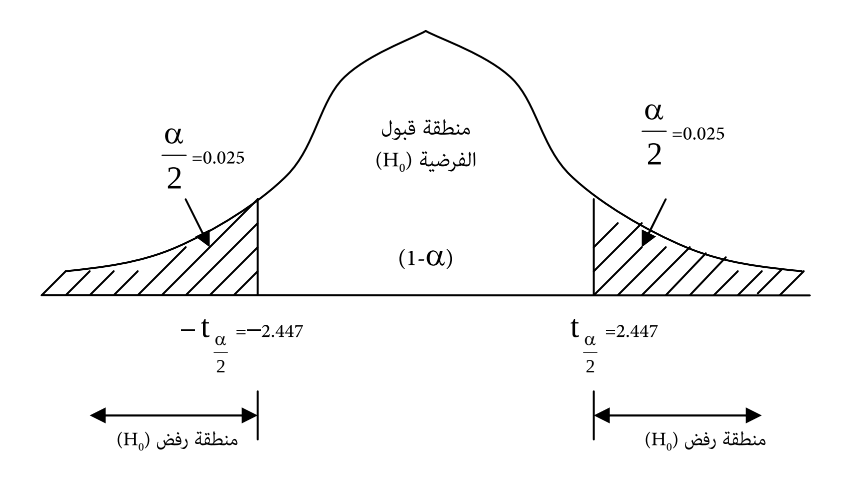
عليه تكون إحصاءة الاختبار (t)، على النحو الآتي:

$$t_{cal.} = \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{SE_{\hat{\beta}_0}}$$

$$= \frac{105.525 - 0}{4.112}$$

$$= 25.663$$

من جداول توزيع (t) بدرجة حرية (6)، عند مستوى المعنوية (α=0.05) ، نحصل على قيم (t) الجدولية البالغة $\left(t_{\frac{\alpha}{2}} = 2.447\right)$ و $\left(-t_{\frac{\alpha}{2}} = -2.447\right)$ ، والشكل التالي يوضح مناطق قبول ورفض فرضية العدم (H_0) :



القرار الاحصائي :

بما إن القيمة المطلقة لاحصاءة الاختبار المحسوبة ($|t_{cal.}|$) والبالغة (25.663) ، هي اكبر من القيمة الجدولية البالغة $\left(t_{\frac{\alpha}{2}} = 2.447 \right)$ ، وهذا يعني رفض فرضية العدم (H_0) ، مما يدل ذلك على معنوية معامل التقاطع $\left(\hat{\beta}_0 \right)$ لنموذج الانحدار الخطي البسيط، أي إن معادلة نموذج خط الانحدار لا تمر بنقطة الاصل.

ب- إختبار معنوية معامل الانحدار $\left(\hat{\beta}_1 \right)$:

للتحقق من معنوية معامل الانحدار $\left(\hat{\beta}_1 \right)$، نقوم باختبار الفرضيتين الآتيتين:

$H_0 : \beta_1 = 0$

$H_1 : \beta_1 \neq 0$

نقوم أولاً بحساب $\left(SE_{\hat{\beta}_1} \right)$ ، وفقاً للصيغة الآتية :

$$SE_{\hat{\beta}_1} = SE_{\hat{Y}} * \sqrt{\frac{1}{S_{xx}}}$$

$$= 5.874 * \sqrt{\frac{1}{134}}$$

$$= 5.874 * (0.086)$$

$$= 0.505$$

عليه يمكن حساب إحصاءة الاختبار (t) ، وفقاً للصيغة الآتية :

$$t_{cal.} = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{SE_{\hat{\beta}_1}}$$

$$\therefore t_{cal.} = \frac{(-5.075) - 0}{0.505}$$

$$= -10.05$$

من جداول توزيع (t) ، بدرجة حرية (6) ، عند مستوى المعنوية (α=0.05) ، نحصل على قيم (t) الجدولية البالغة $\left(t_{\frac{\alpha}{2}} = 2.447 \right)$ و $\left(-t_{\frac{\alpha}{2}} = -2.447 \right)$ ، والشكل السابق، يوضح مناطق قبول ورفض فرضية العدم (H_0) .

القرار الاحصائي :

بما إن القيمة المطلقة لاحصاءة الاختبار المحسوبة ($|t_{cal.}|$) والبالغة (10.05) ، هي اكبر من القيمة الجدولية البالغة $\left(t_{\frac{\alpha}{2}} = 2.447 \right)$ ، وهذا يعني رفض فرضية العدم (H_0) ، مما يدل على معنوية معامل الانحدار $\left(\hat{\beta}_1\right)$ لنموذج الانحدار الخطي البسيط، أي إن قيمة معامل الانحدار لا تساوي صفراً.

6- تقدير علامة الطالب ($\hat{Y}_i$) إذا كان مصروفه الاسبوعي (6) دنانير :

$$\because \hat{Y}_i = 105.525 - 5.075 X_i$$

$$\therefore \hat{Y}_i = 105.525 - 5.075 * (6)$$

$$= 105.525 - 30.45$$

$$= 75.075$$

$$\approx 75$$

من النتيجة اعلاه، يتضح بان الطالب الذي مصروفه الاسبوعي (6) دنانير، ستكون علامته الفصلية التقديرية ($\hat{Y}_i$) مساوية إلى (75) .

4-7-5 : العلاقة بين معامل الانحدار $\left(\hat{\beta}_1\right)$ ومعامل الارتباط (r_p) :

The Relationship between the Rergression Coefficient $\left(\hat{\beta}_1\right)$ and the Correlation Coefficient (r_p) .

يمكن الحصول على معامل الانحدار $\left(\hat{\beta}_1\right)$ لنموذج الانحدار الخطي البسيط، بعد معرفة معامل الارتباط البسيط لبيرسون (r_p) بين المتغيرين (X) و (Y) ، وذلك من خلال الصيغة الآتية :

$$\hat{\beta}_1 = r_p * \sqrt{\frac{Var(Y)}{Var(X)}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots. (21)$$

حيث إن :

Var (X) : يمثل تباين المتغير (X) .

Var (Y) : يمثل تباين المتغير (Y) .

من جانب آخر، يمكن الحصول على معامل الارتباط البسيط لبيرسون (r_p) بين المتغيرين (X) و (Y) ، بعد معرفة معامل الانحدار $\left(\hat{\beta}_1\right)$ لنموذج الانحدار الخطي البسيط، وذلك من خلال الصيغة الآتية :

$$r_p = \hat{\beta}_1 * \sqrt{\frac{Var(X)}{Var(Y)}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. (22)$$

مثال (14) :

إذا كان لديك المعلومات الآتية :

$$\sum_{i=1}^{10} (X_i - 5)^2 = 105 \quad , \quad \sum_{i=1}^{10} (Y_i - 1)^2 = 42 \quad , \quad r_p = 0.8$$

المطلوب :

1- تقدير معلمات نموذج الانحدار الخطي البسيط $\left(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0\right)$.

2- حساب معامل التحديد (R^2) ، مفسراً النتيجة .

3- التنبؤ بقيمة $\left(\hat{Y}_i\right)$، إذا كانت قيمة $(X_i = 15)$.

الحل:

1- تقدير معلمات النموذج $\left(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0\right)$:

$$\because \hat{\beta}_1 = r_p * \sqrt{\frac{Var(Y)}{Var(X)}}$$

نقوم أولاً بحساب تباين المتغيرين (X) و (Y) ، كالآتي :

$$Var\ (X) = \frac{\sum_{i}^{10}\left(X_i - 5\right)^2}{n-1}$$

$$= \frac{105}{10-1}$$

$$= 11.667$$

$$Var\ (Y) = \frac{\sum_{i}^{10}\left(Y_i - 1\right)^2}{n-1}$$

$$= \frac{42}{10-1}$$

$$= 4.667$$

$$\therefore \hat{\beta}_1 = 0.8 * \sqrt{\frac{4.667}{11.667}}$$

$$= 0.8 * (0.632)$$

$$= 0.506$$

$$\therefore \hat{\beta}_0 = \overline{Y} - \hat{\beta}_1 \overline{X}$$

$$= 1 - (0.506)\ (5)$$

$$= 1 - 2.53$$

$$= -1.53$$

عليه يكون النموذج التقديري (التنبؤي) ، على النحو الآتي:

$$\because \hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i$$

$$\therefore \hat{Y}_i = -1.53 + 0.506\ X_i \Longrightarrow \text{Forecasting Model.}$$

2- حساب معامل التحديد (R^2) :

يعرف معامل التحديد (R^2) بأنه: "مربع قيمة معامل الارتباط الخطي البسيط"، أي إن:

$$R^2 = r_p^{\ 2}$$

$$= (0.8)2$$

$$= 0.64$$

يتضح من خلال قيمة معامل التحديد (R^2) البالغة (0.64) بان المتغير المستقل (X) ، يفسر ما نسبته (64%) من التغيرات التي تطرأ على قيم المتغير التابع (Y) ، أما النسبة المتبقية والبالغة (36%) فانها تعود إلى متغيرات أخرى لم تدخل في نموذج الانحدار الخطي البسيط قيد الدراسة .

3- التنبؤ بقيمة ($\hat{Y}_i$) إذا كانت قيمة ($X_i = 15$) :

$$\because\ \hat{Y}_i = -1.53 + 0.506\ X_i$$

$$\therefore\ \hat{Y}_i = -1.53 + 0.506 * (15)$$

$$= -1.53 + 7.59$$

$$= 6.06$$

أسئلة عامة حول الفصل الخامس

س1 : إذا كان لديك المتغيرين الكميين (X) و (Y) ، وإن معامل الارتباط بينهما للمجتمع، يأخذ الشكل الآتي :

$$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}$$

حيث إن :

Cov (X,Y) : يمثل التباين المشترك بين المتغيرين (X) و (Y) .

Var(Y) , Var(X) : يمثل تباين المتغيرين (X) و (Y) على الترتيب .

المطلوب:

إثبت إن معامل الارتباط البسيط المحسوب للعينة، يأخذ الشكل الآتي:

$$r_{xy} = \frac{\sum XY - n\bar{X}\ \bar{Y}}{\sqrt{\sum X_i^2 - n\bar{X}^2}\sqrt{\sum Y_i^2 - n\bar{Y}^2}}$$

س2 : إذا كان لديك (n) من أزواج القيم $[(Y_1, X_1), (Y_2, X_2) \dots (Y_n, X_n)]$ للمتغيرين الكميين (X) و (Y) .

وأجري التحويل التالي على قيم المتغيرين (X) و (Y) ، وفقاً للصيغ الآتية :

$$X_i^* = aX_i + b$$
$$Y_i^* = cY_i + d$$

حيث إن :

d, c, b, a : تمثل ثوابت حقيقية .

المطلوب: إثبت العلاقة الآتية :

$$r_{x^*y^*} = \frac{ac}{|ac|} * r_{xy}$$

س3 : إذا كان لديك (5) أزواج من قيم المتغيرين (X) و (Y) :

المتغير (X)	2	1	3	5	4
المتغير (Y)	3	1	2	4	5

المطلوب:

1- إرسم الشكل الانتشاري (Scatter diagram) لازواج القيم .

2- إحسب معامل الارتباط البسيط لبيرسون (r_p) ، بين المتغيرين (X) و (Y) .

س4 : قامت إحدى دوائر الانواء الجوية في المملكة، بتسجيل كمية الامطار الساقطة (X) ودرجات الحرارة (Y) ، على مدى (10) عشرة أيام متتالية ممطرة، على النحو الآتي:

كمية الامطار (X)	4	5	6	2	6	6	7	3	8	3
درجات الحرارة (Y)	2	0	1	1	0	1	1	2	1	1

المطلوب:

1- إحسب معامل الارتباط البسيط لبيرسون (r_p) ، بين كمية الامطار (X) ودرجات الحرارة (Y) .

2- إحسب معامل إرتباط الرتب لسبيرمان (r_s) بين المتغيرين، معلقاً على النتائج.

س5 : المعلومات التالية، تم الحصول عليها من خلال بعض العمليات الحسابية على أزواج قيم المتغيرين الكميين (X) و (Y) ، اللذين يمثلان الدخل الاسبوعي (X) والانفاق الاسري الاسبوعي (Y) ، لـ (30) أسرة :

$\Sigma XY = 62260$, $\Sigma X^2 = 66830$, $\Sigma Y^2 = 59060$

$\overline{X} = 43$, $\overline{Y} = 40$

المطلوب:

1- إحسب معامل الارتباط البسيط لبيرسون (r_p) بين المتغيرين (X) و (Y) .

2- هل يمكن القول بان هذه العينة، قد أختيرت من مجتمع فيه معامل الارتباط بين المتغيرين لا يقل عن (0.97) ، عند مستوى المعنوية (α=0.01) ؟

س6 : إذا كان لديك (7) أزواج من قيم المتغيرين (X) و (Y) :

المتغير (X)	10	40	20	50	30	20	40
المتغير (Y)	10	50	30	40	20	10	50

المطلوب:

1- إحسب معامل الارتباط البسيط لبيرسون (r_p) ، بين المتغيرين (X) و (Y) .

2- هل إن قيمة معامل الارتباط البسيط، تدل على وجود علاقة معنوية بين المتغيرين، وفق معيطات العينة، عند مستوى المعنوية (α=0.05) ؟

س7 : البيانات التالية، تمثل التقديرات النهائية لاحد عشر مهندس في دورة تدريبية تخصصية، وعدد سنوات الخبرة في مجال اختصاصهم.

التقدير النهائي	إمتياز	جيد جداً	جيد	متوسط	إمتياز	جيد جداً	جيد جداً	جيد	جيد جداً	مقبول	إمتياز
عدد سنوات الخبرة	16	20	14	8	18	11	17	15	17	6	18

المطلوب:

1- إحسب معامل إرتباط الرتب لسبيرمان (r_s) ، بين التقديرات النهائية للمهندسين وعدد سنوات خبرتهم.

2- أختبر معنوية معامل إرتباط الرتب لسبيرمان (r_s) ، عند مستوى المعنوية (α=0.05) .

س8 : إذا كان معامل إرتباط الرتب لسبيرمان (r_s)، بين عدد سنوات الخدمة الوظيفية (X) وكفاءة الاداء (Y)، على اساس عينة عشوائية قوامها (40) تدريسي من اعضاء هيئة التدريس في جامعة جرش مساوٍ الى (r_s = 0.89) .

المطلوب:

إختبر معنوية معامل إرتباط الرتب لسبيرمان (r_s)، عند مستوى المعنوية (α=0.01) .

س9 : جدول التوزيع التكراري المزدوج التالي، يبين نتائج تجربة زراعية للتعرف على طبيعة العلاقة بين نوع التربة (X) وكمية المحصول (Y) (بالطن) خلال موسم زراعي واحد في عدد من القطع الزراعية التجريبية بلغت (200) قطعة .

كمية المحصول (Y) / نوع التربة (X)	قليلة	متوسطة	جيدة	المجموع
طينية	20	32	18	70
رملية	10	20	35	65
مزيجية	15	23	27	65
المجموع	45	75	80	200

المطلوب:

قياس العلاقة بين نوع التربة (X) وكمية المحصول (Y) ، باستخدام معامل التوافق (r_c) .

س10 : جدول التوزيع التكراري المزدوج التالي، يبين حركة اسعار الاسهم لـ(180) شركة، وفقاً للوضع الاقتصادي السائد، خلال فترة زمنية معينة.

الوضع الاقتصادي (X) / حركة اسعار الاسهم (Y)	رديء	اعتيادي	جيد	المجموع
بانخفاض	40	30	10	80
بارتفاع	10	30	60	100
المجموع	50	60	70	180

المطلوب:

قياس العلاقة بين الوضع الاقتصادي السائد (X) وحركة اسعار الاسهم (Y) ، باستخدام المعاملات الآتية :

(1) معامل التوافق (r_c) .

(2) معامل فاي (ϕ) .

س11 : إذا كانت العلاقة بين المتغيرين الكميين (X) و (Y) ، علاقة خطية تأخذ الشكل الآتي:

$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n$

المطلوب:

إثبت العلاقة الآتية :

$$\hat{\beta}_1 = r_p * \frac{Sd(Y)}{Sd(X)}$$

س12 : إذا كانت العلاقة بين المتغيرين الكميين (X) و (Y) ، علاقة خطية ، موضحة بالعلاقتين الآتيتين :

$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i$

$X_i = \alpha_0 + \alpha_1 Y_i$

المطلوب:

إثبت، إن معامل الارتباط البسيط (r_p) عبارة عن الوسط الهندسي لمعاملي الانحدار $(\hat{\beta}_1)$ و $(\hat{\alpha}_1)$ ، أي إن :

$$r_p = \sqrt{\hat{\beta}_1 * \hat{\alpha}_1}$$

س13 : البيانات التالية، تمثل الوقت المستغرق (X) (بالساعة)، في انتاج عدد من الوحدات (Y) لسلعة معينة، على مدى (10) عشرة أيام عمل متتالية.

الوقت المستغرق (X)	60	70	65	80	60	90	85	95	65	100
عدد الوحدات المنتجة (Y)	100	120	85	130	110	135	130	140	100	150

المطلوب:

1- تقدير معلمات نموذج الانحدار الخطي البسيط $(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0)$.

2- حساب معامل التحديد (R^2) ، مفسراً النتيجة .

3- إيجاد الخطأ المعياري للتقدير $\left(SE_{\hat{Y}}\right)$ ، باستخدام صيغة البواقي .

4- التنبؤ بعدد الوحدات المنتجة $\left(\hat{Y}\right)$ ، إذا كان الوقت المستغرق (X=120) ساعة.

س14 : البيانات التالية، تمثل الكميات المعروضة (X) من سلعة معينة، واسعار الوحدة الواحدة (Y) منها (بالدينار)، في (8) ثمانية اسواق تجارية بمدينة عمان :

الكميات المعروضة (X)	14	15	12	15	17	13	16	18
سعر السلعة (Y)	11	7	15	8	8	7	6	10

المطلوب:

1- تقدير معلمات نموذج الانحدار الخطي البسيط $\left(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0\right)$.

2- حساب الخطأ المعياري للتقدير $\left(SE_{\hat{Y}}\right)$ ، مستخدماً صيغة القيم الاصلية.

3- إختبار معنوية نموذج الانحدار، مستخدماً $(\alpha=0.05)$.

4- إختبار معنوية معلمات النموذج $\left(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0\right)$ ، مستخدماً $(\alpha=0.01)$.

5- التنبؤ بسعر السلعة $\left(\hat{Y}_i\right)$ إذا كانت الكمية المعروضة منها $(X_i=20)$ وحدة.

س15 : إذا كانت المعادلة التقديرية لنموذج الانحدار الخطي البسيط، معطاة بالشكل الآتي:

$$\hat{Y}_i = 0.6 + 0.8\, X_i \qquad , \quad i=1, 2, 3, 4, 5$$

$$\Sigma\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2 = 1.6 \qquad , \quad \Sigma X_i = 15 \qquad , \quad \Sigma X_i^2 = 55$$

المطلوب:

1- حساب الخطأ المعياري للتقدير $\left(SE_{\hat{Y}}\right)$.

2- إختبار معنوية معلمات نموذج $\left(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0\right)$ ، مستخدماً $(\alpha=0.05)$.

3- التنبؤ بقيمة $\left(\hat{Y}_i\right)$ ، إذا كانت قيمة $(X_i=8)$.

س16 : إذا كانت لديك المعلومات الآتية :

$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + 0.9 X_i \qquad , \quad i=1, 2, ..., 10$

$\Sigma(X_i - 5)^2 = 90 \qquad , \quad \Sigma (Y_i - 6)^2 = 110 \quad , \quad \Sigma\left(Y_i - \hat{Y}\right)^2 = 6$

المطلوب:

1- حساب معامل التحديد (R^2)، مفسراً النتيجة .
2- ايجاد الخطأ المعياري للتقدير $\left(SE_{\hat{Y}}\right)$.
3- إختبار معنوية نموذج الانحدار، مستخدما (α=0.01) .
4- إختبار معنوية معلمات النموذج $\left(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0\right)$ ، مستخدماً (α=0.05) .

س17 : اذا توفرت لديك المعلومات الآتية :

$Sdx = 5 \quad , \quad Sdy = 10 \quad , \quad r_p = 0.71 \quad , \quad \overline{X} = 4 \quad , \quad \overline{Y} = 6$

المطلوب:

1- تقدير معلمات نموذج الانحدار البسيط $\left(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0\right)$.
2- حساب معامل التحديد $\left(R^2\right)$ ، مفسراً النتيجة .
3- التنبؤ بقيمة $\left(\hat{Y}_i\right)$ ، إذا كانت قيمة (X_i = 10) .

الفصل السادس
تحليل التباين
Analysis of Variance – ANOVA

1-6 : مقدمة :

يُعد اسلوب تحليل التباين (ANOVA) أحد الطرق أو الاختبارات الاحصائية التي تُستخدم لقياس الفروق بين متوسطات (Means) عدد من المجتمعات، عندما يصعب او يتعذر علينا قياسها باستخدام إختبار (T) الذي يفضل استخدامه في حالة قياس الفروق بين متوسطين أو ثلاثة متوسطات فقط، وفي الحالة التي يكون فيها عدد المتوسطات اكثر من ذلك، فان أنسب طريقة لقياس الفروق فيما بينها، هو إختبار (F) الذي يمكن الحصول عليه من خلال جدول تحليل التباين (ANOVA) ، ويكون اسلوب تحليل التباين على عدة أنواع، نذكر منها:

1- تحليل التباين باتجاه واحد One-Way Analysis of Variance
2- تحليل التباين باتجاهين Two-Way Analysis of Variance

وفيما يلي شرحاً مفصلاً لكل نوع، وعلى النحو الآتي:

2-6 : تحليل التباين باتجاه واحد: One-Way ANOVA

يُستخدم اسلوب تحليل التباين باتجاه واحد (احادي التصنيف)، عندما يكون المتغير المستقل (X_i) من النوع المصنف (Categorical Variable) ويمثل عدد المجتمعات (المجموعات)، اما المتغير المعتمد (Y_{ij}) فانه يمثل المشاهدات (Observations)، ويخضع هذا المتغير للتوزيع الطبيعي (Normal Distribution) ، ويفترض أن تكون المجتمعات مستقلة بعضها عن البعض الآخر.

بافتراض لدينا (K) من المجتمعات، اختيرت عيناتها بشكل عشوائي حجم كل منها (n) من المشاهدات، وبفرض إن هذه المجتمعات مستقلة بعضها عن بعض، وتخضع للتوزيع الطبيعي بمتوسطات $[\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k]$ ، وبتباينات متساوية

$\left(\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = ... = \sigma_k^2 = \sigma^2\right)$ ، والمطلــوب هــو إختبــار الفــروق بــين متوســطات المجتمعــات (المجموعات).

والجدول التالي، يوضح توزيع المشاهدات (Y_{ij}) رقم (j) المأخوذة من المجتمع رقم (i) :

المجتمعات	**المشاهدات (Y_{ij})**						**Total**	**المتوسطات**
Population	1	2	…..	j	…..	n		**Means**
1	Y_{11}	Y_{12}	…..	Y_{1j}	…..	Y_{1n}	$Y_{1.}$	$\overline{Y}_{1.}$
2	Y_{21}	Y_{22}	…..	Y_{2j}	…..	Y_{2n}	$Y_{2.}$	$\overline{Y}_{2.}$
:	:	:		:		:	:	:
:	:	:		:		:	:	:
i	Y_{i1}	Y_{i2}	…..	Y_{ij}	…..	Y_{in}	$Y_{i.}$	$\overline{Y}_{i.}$
:	:	:		:		:	:	:
:	:	:		:		:	:	:
k	Y_{k1}	Y_{k2}	…..	Y_{kj}	…..	Y_{kn}	$Y_{k.}$	$\overline{Y}_{k.}$
Total	-	-	…..	-	…..	-	$Y_{..}$	$\overline{Y}_{..}$

حيث إن :

$Y_{i.}$: تمثل مجموع المشاهدات للمجتمع رقم (i) .

$\overline{Y}_{i.}$: تمثل متوسط مشاهدات المجتمع رقم (i) .

$Y_{..}$: تمثل مجموع المشاهدات الكلية.

$\overline{Y}_{..}$: تمثل المتوسط العام للمشاهدات الكلية.

وبناءاً على ما تقدم، فان المشاهدة (Y_{ij}) ، تعطى بالنموذج الآتي:

$$Y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij} \qquad .... (1)$$

حيث إن :

Y_{ij} : تمثل قيمة المشاهدة (j) المأخوذة من المجتمع رقم (i) .

μ_i : تمثل متوسط المجتمع رقم (i) .

ε_{ij} : مقياس إنحراف المشاهدة (j) في المجتمع (i) عن متوسط المجتمع (μ_i) .

إن الفرضية الاحصائية المكافئة للنموذج رقم (1) ، هي:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_k$$

H_1 : At least two means are not equal .

يمكن إعادة كتابة المعادلة رقم (1)، بعد التعويض عن (μ_i) بما يساويها، إذ إن :

$$\mu_i = \mu + \alpha_i$$

عليه يكون النموذج البديل للمشاهدة (Y_{ij}) ، على النحو الآتي :

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij} \qquad .... (2)$$

$$(i = 1, 2, ... , k \quad , \quad j = 1, 2, ... , n)$$

تحت القيد $\left(\sum_{i}^{k} \alpha_i = 0 \right)$.

حيث إن :

μ : يمثل التوسط العام لمتوسطات المجتمعات (μ_i) .

α_i : تمثل تأثير المجتمع رقم (i) .

وبالتالي تكون الفرضية الاحصائية المكافئة للنموذج رقم (2)، تأخذ الشكل الآتي:

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_k = 0$$

H_1 : At least one of (α_i) is not equal to (Zero).

وتأسيساً على ما تقدم، فان إسلوب تحليل التبـاين باتجـاه واحـد، ينطـوي عـلى تجزئـة مجمـوع المربعات الكلي الى مركبتين تتمثـل بــ (بمجمـوع مربعـات يُعـزى للتفـاوت بـين المعـاملات (المجموعـات)، والثانية تمثل مجموع مربعات يُعزى للخطأ التجريبي) ، أي إن:

$$\sum_{i}^{k}\sum_{j}^{n}\left(Y_{ij} - \overline{Y}_{..}\right)^2 = \sum_{i}^{k}\sum_{j}^{n}\left(\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{..}\right)^2 + \sum_{i}^{k}\sum_{j}^{n}\left(Y_{ij} - \overline{Y}_{i.}\right)^2$$

$$= n\sum_{i}^{k}\left(\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{..}\right)^2 + \sum_{i}^{k}\sum_{j}^{n}\left(Y_{ij} - \overline{Y}_{i.}\right)^2 \qquad .... (3)$$

إن مكونات العلاقة رقم (3)، يمكن التعبير عنها بدلالة مجموع المربعـات (Sum of Squares) ، أي إن :

$$SST = SSG + SSE \qquad .... (4)$$

حيث إن :

SST : تمثل مجموع المربعات الكلي (Total Sum of Squares) .

SSG : تمثل مجموع مربعات المجموعات (Groups Sum of Squares) .

SSE : تمثل مجموع مربعات الخطأ (Error Sum of Squares) .

ولاغراض الحساب، وبناء جدول تحليـل التبـاين (ANOVA) ، يمكـن اسـتخدام المعـادلات التاليـة، للحصول على مجموع المربعات الخاصة بـ (SSE , SSG , SST)، وعلى النحو الآتي:

$$SST = \sum_{i}^{k}\sum_{j}^{n} Y_{ij}^2 - nk\overline{Y}_{..}^2 \qquad .... (5)$$

$$SSG = n\sum_{i}^{k} \overline{Y}_{i.}^2 - nk\overline{Y}_{..}^2 \qquad .... (6)$$

$$SSE = SST - SSG \qquad .... (7)$$

والجدول التالي، يوضح مكونات جدول تحليل التباين باتجاه واحد :

مصدر الاختلاف Source of Variation	مجموع المربعات Sum of Squares	درجات الحرية Degrees of Freedom	متوسط المربعات Mean of Squares	قيمة (F)المحسوبة Fratio
بين المجموعات B.groups	SSG	k-1	$MSG = \frac{SSG}{K-1}$	$F = \frac{MSG}{MSE}$
الخطأ Error	SSE	k(n-1)	$MSE = \frac{SSE}{K(n-1)}$	
الكلي Total	SST	nk-1	-	-

بعد ذلك يتم مقارنة قيمة (F) المحسوبة، مع قيمة (F) الجدولية التي يتم الحصول عليها من جداول توزيع (F) ، بدرجتي حرية البسط (k-1) والمقام [k(n-1)] ، ومستوى معنوية معين (α) أي إن { $F_{[(K-1), K(n-1) , \alpha]}$ } .

قاعدة القرار :

إذا كانت قيمة (F) المحسوبة أكبر من أو تساوي قيمة (F) الجدولية، يدلل ذلك على رفض الفرضية (H_0) ، وهذا يعني وجود فروق معنوية بين المجموعات، عند مستوى المعنوية (α) ، وبعكسه يتم قبول الفرضية (H_0) ، مما يعني عدم وجود فروق بين المجموعات.

مثال (1) :

البيانات الموضحة بالجدول التالي، تمثل نتائج تجربة زراعية لثلاثة أنواع من السماد الكيمياوي المركب، تم استخدامها لزيادة انتاجية محصول الحنطة، لعدد من الاراضي الزراعية بنفس المساحة والخصوبة.

انواع السماد الكيماوي	المشاهدات (Y_{ij})								Total
	1	2	3	4	5	6	7	8	
t_1	8	10	7	6	9	5	8	7	60
t_2	5	3	5	4	4	6	5	4	36
t_3	15	10	11	13	9	13	14	11	96
Total	-	-	-	-	-	-	-	-	192

المطلوب :

1- صياغة الفرضية الاحصائية للتجربة اعلاه.

2- استخدام اسلوب تحليل التباين (ANOVA)، لاختبار الفروق بين متوسطات انواع السماد الكيمياوي، مستخدماً (α=0.01) .

الحل:

1- الفرضية الاحصائية للتجربة :

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

H_1 : At Least two means are not equal .

2- اختبار الفروق بين المتوسطات :

لبناء جدول تحليل التباين باتجاه واحد (One-Way ANOVA)، نقوم بحساب المتوسطات $\left(\overline{Y}_{i.}\right)$، ومجاميع المربعات (Sum of Squares) ، كالآتي:

$$\overline{Y}_{1.} = \frac{60}{8} = 7.5$$

$$\overline{Y}_{2.} = \frac{36}{8} = 4.5$$

$$\overline{Y}_{3.} = \frac{96}{8} = 12.0$$

$$\therefore \overline{Y}_{..} = \frac{7.5 + 4.5 + 12}{3}$$

$$= 8$$

أو يمكن ايجاد $\left(\overline{Y}_{..}\right)$ ، وفقاً للصيغة الآتية :

$$\overline{Y}_{..} = \frac{\sum_{i}^{3}\sum_{j}^{8} Y_{ij}}{nk}$$

$$= \frac{192}{8(3)}$$

$$= 8$$

$$\therefore SST = \sum_{i}^{3}\sum_{j}^{8} Y_{ij}^{2} - nk\overline{Y}_{..}^{\,2}$$

$$= \left[(8)^2 + (10)^2 + ... + (11)^2\right] - 8(3)(8)^2$$

$$= 1818 - 1536$$

$$= 282$$

$$\therefore SSG = n\sum_{i}^{3} \overline{Y}_{i.}^{2} - nk\overline{Y}_{..}^{2}$$

$$= 8\left[(7.5)^2 + (4.5)^2 + (12)^2\right] - 8(3)(8)^2$$

$$= 1764 - 1536$$

$$= 228$$

$\therefore$ SSE = SST − SSG

= 282 − 228

= 54

عليه يكون جدول تحليل التباين باتجاه واحد (One-Way ANOVA)، كالآتي:

مصدر الاختلاف S.O.V.	مجموعات المربعات SS	درجات الحرية df.	متوسط المربعات MS	قيمة (F) المحسوبة Fratio
بين المعاملات	228	2	114	F = 44.333**
الخطأ	54	21	2.5714	
الكلي	282	23	-	-

نقوم باستخراج قيمة (F) الجدولية، من جداول توزيع (F)، بدرجتي حرية (2، 21)، ومستوى المعنوية (α=0.01) ، يتبين بان [$F_{(2,21,0.01)}$=5.78] .

القرار:

يتضح من جدول تحليل التباين، بان قيمة (F) المحسوبة بلغت (44.333) وهي اكبر من قيمة (F) الجدولية البالغة (5.78) ، عند مستوى المعنوية (α=0.01) ، مما يدلل على رفض الفرضية (Ho)، وهذا يعني وجود فروق معنوية بدرجة عالية بين متوسطات انواع السماد الكيماوي (μ_3, μ_2, μ_1) ، على مستوى المعنوية (α=0.01) .

3-6 : المقارنات المقترحة بعد إجراء تحليل التباين :

يُعد إختبار (F) في جدول تحليل التباين (ANOVA) من الاختبارات العامة والمهمة في قياس الفروق (الاختلافات) بين متوسطات المجموعات او المعاملات، ففي حالة عدم ثبوت معنوية إحصاءة الاختبار (F) المحسوبة في جدول تحليل التباين، لاختبار الاختلاف بين متوسطات المجموعات، عندئذ نكتفي باجراء المقارنات المتعامدة (Orthogonal Comparisons) قبل إجراء تحليل التباين، اما في حالة ثبوت معنوية إحصاءة الاختبار (F) المحسوبة، عند أي مستوى من مستويات المعنوية (α)، ففي هذه

الحالة بالامكان أن نتخذ قراراً بشأن أي من متوسطات المجموعات تختلف فيما بينها إختلافاً معنوياً.

ولتحقيق هذا الغرض هنـاك عـدد مـن الطـرق التـي تسـتخدم لمقارنـة متوسـطات المجموعـات للوقوف على الاختلافات (الفروق) الموجودة فيما بينها، نذكر منها ما يأتي:

1-3-6 : مقارنة جميع متوسطات المجموعات بمتوسط مجموعة المقارنة (Control):

يمكن إجراء مقارنة جميع متوسطات المجموعات بمتوسط مجموعة المقارنة (Control) للوقوف على الفروق المعنوية الناتجة بـين متوسـط مجموعـة المقارنـة وكـل متوسـط مـن متوسـطات المجموعـات (المعاملات)، وقد استخدمنا لهذا الغرض إختبـار دونـت (Dunnett Test) ، والـذي يمكـن توضـيحه، عـلى النحو الآتي:

إختبار دونت (Dunett) : Dunnett Test

يمكن إجراء إختبار (Dunnett) بـافتراض وجـود (k) مـن متوسـطات المجموعـات، بالاضـافة الى متوسط مجموعة المقارنة (Control) ، ففي هذه الحالة يمكن اجراء (k) من المقارنات، والتي هـي عبـارة عن مقارنة متوسط مجموعة المقارنة (Control) وكل متوسط من متوسطات المجموعات الأخرى. ولاجراء إختبار (Dunnett) نتبع الخطوات الآتية:

1- حساب الخطأ المعياري للفرق بين متوسطي أي مجموعتين، وفقاً للعلاقة الآتية:

$$S_{(\overline{Y}_{i.}-\overline{Y}_{i.}^{\prime})}=\sqrt{\frac{2MSE}{n}}$$

حيث إن :

MSE : يمثل متوسط مربعات الخطأ في جدول تحليل التباين.

n : عدد المشاهدات لكل مجموعة (في حالة تساوي مشاهدات المجموعات).

2- إستخراج قيمة (t) الجدولية من جداول (t-Dunnett) ، إعتماداً على عدد متوسـطات المجموعـات (k) باستثناء متوسط مجموعة المقارنة، ودرجات حرية الخطأ (df_E) ، ومستوى المعنوية المطلوب (α) .

3- حساب قيمة الفرق المعنوي (D) ، وفقاً للصيغة الآتية :

$$D = S_{\left(\overline{Y}_{i.}-\overline{Y}'_{i.}\right)} \quad * \quad t\text{-}Dunnett_{(\alpha)}$$

4- حساب الفـروق المطلقـة بـين متوسـط مجموعـة المقارنـة (Control)، وكـل متوسـط مـن متوسـطات المجموعات الأخرى، ومقارنة الفروق الناتجة مع قيمة الفرق المعنوي (D).

5- قاعدة القرار، تنص على وجود فروق معنوية، عندما تكون القيم المطلقة للفروق المحسوبة أكبر مـن أو تساوي قيمة الفرق المعنوي (D)، وبعكسه تكون الفروق غير معنوية.

مثال (2):

استخدم نتائج جدول تحليل التباين التالي، ومتوسطات المعاملات:

مصدر الاختلاف	مجموع المربعات	درجات الحرية	متوسط المربعات	قيمة (F) المحسوبة
بين المعاملات	228	2	114	**44.333
الخطأ	54	21	2.5714	
الكلي	282	23	-	-

متوسطات المعاملات
$\overline{Y}_{1.}=7.5$
$\overline{Y}_{2.}=4.5$
$\overline{Y}_{3.}=12.0$

المطلوب:

إجراء المقارنات بين متوسطات المجموعـات، باسـتخدام إختبـار (Dunnett)، مفترضاً المجموعـة الأولى (معاملة المقارنة)، على مستوى المعنوية (α=0.05) .

الحل:

لاجراء إختبار (Dunnett) نتبع الخطوات الآتية:

1- حساب الخطأ المعياري، وفقاً للعلاقة الآتية :

$$S_{(\overline{Y}_{i.}-\overline{Y}'_{i.})} = \sqrt{\frac{2MSE}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{2(2.5714)}{8}}$$

$$= 0.802$$

2- من جداول (t-Dunnett) بدرجات حرية الخطأ البالغة (21)، وعدد المتوسطات الداخلة بالمقارنة البالغ (2)، ومستوى المعنوية (α=0.05) ، تبين إن قيمة (t) الجدولية بلغت (2.37) .

3- حساب قيمة الفرق المعنوي (D) ، وفقاً للصيغة الآتية:

$$D_{(0.05)} = S_{(\overline{Y}_{i.}-\overline{Y}'_{i.})} * t_{(21,\ 0.05)}$$

$$= 0.802\ (2.37)$$

$$= 1.901$$

4- حساب الفروق المطلقة بين متوسط مجموعة المقارنة (Control) البالغ (7.5) ، وكل متوسط من متوسطات المجموعات الاخرى $(\overline{Y}_{i.})$ ، كما هو موضح بالجدول الآتي:

المعاملات $t_{i.}$	المتوسطات $\overline{Y}_{i.}$	$\lvert \overline{Y}_{i.}$ -Control ($\overline{Y}_{1.}$ =7.5) $\rvert$	الفرق المعنوي $D_{(0.05)}$
$t_{2.}$	4.5	3 *	1.901
$t_{3.}$	12.0	4.5 *	

5- القرار :

يتضح بان الفروق المطلقة في العمود الثالث والبالغة (3 ، 4.5) هي اكبر من قيمة الفرق المعنوي (D) البالغة (1.901)، وهذا يعني بان الفروق بين متوسطات السماد

الكيميـاوي (t_3, t_2) ومتوسـط السـماد الاول (Control)، تُعـد فـروق معنويـة، عنـد مسـتوى المعنويـة (α=0.05) .

2-3-6 : المقارنات المتعددة بين المتوسطات : Multiple Comparisons

تستخدم المقارنات المتعددة بـين المتوسـطات لمقارنـة متوسـطات المعـاملات بعضـها مـع بعـض، للتحقق من معنوية الفروق بين أي متوسطين. وعلى افتراض اذا كان لدينا (k) مـن المعـاملات في التجربـة، فان عدد المقارنات الممكنة التي يتم اجراؤها بين جميع متوسطات المعاملات يكون:

$$C_2^k = \frac{k(k-1)}{2}$$

ولاجراء هذا النوع من المقارنات، هنـاك العديـد مـن الاختبـارات التـي يمكـن اسـتخدامها لهـذا الغرض، نجملها بالآتي:

أولاً: إختبار الفرق المعنوي الاصغر (.L.S.D): Least Significant Difference Test

إن أول مــن اقــترح اختبــار الفــرق المعنــوي الاصــغر (L.S.D) هــو العــالم "فيشرــ" (Fisher) ، ويستخدم إختبار (.L.S.D) في حالة التجارب التي تحتوي على معاملتين فقط، أما اذا احتوت التجربة عـلى أكثر من معاملتين، فينصح بعدم استخدام هذا الاختبـار، الا في حالـة اجـراء مقارنـات بـين أزواج معـاملات معينة يتم إختيارها عشوائياً وتكون مستقلة بعضها عن بعض.

ولاجراء إختبار (.L.S.D) نتبع الخطوات الآتية :

1- حساب الخطأ المعياري للفرق بين متوسطي أي معاملتين، وفقاً للصيغة الآتية:

$$S_{\left(\bar{Y}_{i.}-\bar{Y}'_{i.}\right)} = \sqrt{\frac{2MSE}{n}}$$

2- استخراج قيمة (t) الجدولية، من جداول توزيع (t) ، اعتماداً على درجات حرية الخطأ (df_E) ، ومستوى المعنوية المطلوب (α) .

3- حساب قيمة الفرق المعنوي الاصغر (L.S.D.) وفقاً للصيغة الآتية:

$$L.S.D. = S_{(\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}'_{i.})} * t_{(df_E, \alpha)}$$

4- حساب الفروق بين أزواج متوسطات المعاملات بعد ترتيبها تصاعدياً، ومقارنة الفروق الناتجة مع قيمة (L.S.D.) .

5- قاعدة القرار، تنص على وجود فروق معنوية، عندما تكون الفروق المحسوبة أكبر أو تساوي قيمة (L.S.D.) وبعكسه تكون الفروق غير معنوية.

مثال (3) :

استخدم المعلومات الواردة بالمثال رقم (2) السابق، والمتمثلة بنتائج جدول تحليل التباين، ومتوسطات المعاملات $(\overline{Y}_{1.}, \overline{Y}_{2.}, \overline{Y}_{3.})$ ، وذلك لاختبار الفروق بين متوسطات المعاملات، باستخدام إختبار (L.S.D.) ، مستخدماً مستوى المعنوية (α=0.05) .

الحل:

لاجراء المقارنات بين متوسطي كل معاملتين، باستخدام إختبار (L.S.D.) ، نتبع الخطوات الآتية:

1- حساب الخطأ المعياري، وفقاً للعلاقة الآتية :

$$S_{(\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}'_{i.})} = \sqrt{\frac{2MSE}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{2(2.5714)}{8}}$$

$$= 0.802$$

2- من جداول توزيع (t) ، بدرجات حرية الخطأ (21)، ومستوى المعنوية (α=0.05)، تبين إن قيمة (t) الجدولية بلغت (2.08) .

3- حساب قيمة (L.S.D)، وفقاً للصيغة الآتية:

$$L.S.D_{(0.05)} = S_{\left(\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{i.}^{/}\right)} * t_{(21,0.05)}$$

$$= 0.802\ (2.08)$$

$$= 1.668$$

4- حساب الفروق بين أزواج متوسطات المعاملات $\left(\overline{Y}_{i.}\right)$ بعد ترتيبها تصاعدياً، ويكون:

عدد المقارنات بين أزواج المتوسطات = $\frac{k(k-1)}{2}$

$$= \frac{3(3-1)}{2}$$

$$= 3$$

والجدول التالي، يوضح الفروق الناتجة بين أزواج متوسطات المعاملات:

المتوسطات $\left(\overline{Y}_{i.}\right)$ مرتبة تصاعدياً	$\overline{Y}_{2.} = 4.0$	$\overline{Y}_{1.} = 7.0$	$\overline{Y}_{3.} = 12.0$	$L.S.D_{(0.05)}$
$\overline{Y}_{2.} = 4.5$	-	3*	7.5*	1.668
$\overline{Y}_{1.} = 7.5$	-	-	4.5*	
$\overline{Y}_{3.} = 12.0$	-	-	-	

5- القرار:

يتضح من نتائج الجدول السابق، بأن الفروق الناتجة بين أي متوسطين، هي أكبر من قيمة الفرق المعنوي الأصغر (L.S.D) البالغة (1.668)، وهذا يعني إن الفروق الناتجة تُعد معنوية عند مستوى الدلالة (α = 0.05)، مما يدلل ذلك على وجود اختلافات بين أنواع السماد الكيمياوي المستخدمة في التجربة .

ثانياً: اختبار الفرق المعنوي الصريح (.H.S.D) :

Honest Significant Difference Test

يعود الفضل الأول إلى العالم "توكي" (Tukey) في اقتراح اختبار الفرق المعنوي الصريح (H.S.D)، ويسمى هذا الاختبار أحياناً باختبار توكي (Turkey's Test).

ويُستخدم اختبار (Tukey) في حالة التجارب التي تحتوي على معاملتين أو أكثر، لاختبار الفروق بين متوسطات المعاملات في التجربة .

ولإجراء اختبار (Tukey)، نتبع الخطوات الآتية :

1- حساب الخطأ المعياري لمتوسط أي معاملة، وفقاً للعلاقة الآتية :

$$S_{\overline{Y}_{i.}} = \sqrt{\frac{MSE}{n}}$$

2- استخراج قيمة (Q_k) الجدولية، من جداول توزيع (Q) لتوكي (Tukey)، إعتماداً على درجات حرية الخطأ (df_E)، وعدد متوسطات المعاملات البالغ (k)، ومستوى المعنوية المطلوب (α).

3- حساب قيمة الفرق المعنوي الصريح (H.S.D) ، وفقاً للصيغة الآتية :

$$H.S.D. = S_{\overline{Y}_{i.}} * Q_k$$

4- حساب الفروق بين أزواج متوسطات المعاملات $(\overline{Y}_{i.})$ بعد ترتيبها تصاعدياً، ومقارنة الفروق الناتجة مع قيمة (H.S.D).

5- قاعدة القرار، تنص على وجود فروق معنوية، عندما تكون الفروق المحسوبة أكبر من أو تساوي قيمة الفرق المعنوي الصريح (H.S.D)، وبعكسه تكون الفروق غير معنوية.

مثال (4):

استخدم المعلومات الواردة بالمثال رقم (2) السابق، وذلك لاختبار الفروق بين متوسطات المعاملات الثلاثة، باستخدام إختبار الفرق المعنوي الصريح (H.S.D)، مستخدماً مستوى المعنوية ($\alpha = 0.05$) .

الحل :

لاجراء المقارنات بين متوسطات المعاملات، باستخدام إختبار (H.S.D)، نتبع الخطوات الآتية :

1- حساب الخطأ المعياري لمتوسط أي معاملة، وفقاً للعلاقة الآتية :

$$S_{\overline{Y}_{i.}} = \sqrt{\frac{MSE}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{2.5714}{8}}$$

$$= 0.567$$

2- من جداول توزيع (Q) لتوكي (Tukey) ، بدرجات حرية الخطأ البالغة (21)، وعدد متوسطات المعاملات البالغة (3) ، ومستوى المعنوية ($\alpha = 0.05$)، تبين بأن قيمة (Q_3) الجدولية بلغت (3.56) .

3- حساب قيمة (H.S.D)، وفقاً للصيغة الآتية:

$$H.S.D._{(0.05)} = S_{\overline{Y}_{i.}} * Q_3$$

$$= 0.567\ (3.56)$$

$$= 2.019$$

4- حساب الفروق بين أزواج متوسطات المعاملات ($\overline{Y}_{i.}$) بعد ترتيبها تصاعدياً، ومقارنة الفروق الناتجة مع قيمة الفرق المعنوي الصريح (H.S.D)، كما هو موضح بالجدول الآتي :

المتوسطات ($\overline{Y}_{i.}$) مرتبة تصاعدياً	$\overline{Y}_{2.}$ =4.5	$\overline{Y}_{1.}$ =7.5	=12.0 $\overline{Y}_{3.}$	H.S.D $_{(0.05)}$
$\overline{Y}_{2.}$ = 4.5	-	3*	7.5*	2.019
$\overline{Y}_{1.}$ = 7.5	-	-	4.5*	
$\overline{Y}_{3.}$ =12.0	-	-	-	

5- القرار :

يتضح من نتائج الجدول السابق، بأن الفروق الناتجة بين أي متوسطين، هي أكبر من قيمة الفرق المعنوي الصريح (H.S.D) البالغة (2.019)، وهذا يعني إن الفروق الناتجة تُعد معنوية عند مستوى الدلالة (α = 0.05)، مما يدلل ذلك على وجود إختلافات بين أنواع السماد الكيمياوي المستخدمة في التجربة.

ثالثاً : إختبار شيفيه (Scheffe) : Scheffe's Test

قام العالم "شيفيه" (Scheffe) باقتراح هذا الاختبار، لمقارنة الفروق بين المتوسطات لأي عدد من المعاملات، ويستند هذا الاختبار على حساب القيمة الحرجة لشيفيه (Scheffe Value) التي تستخدم لمقارنة الفروق بين متوسطي أي معاملتين .

ولاجراء إختبار شيفيه (Scheffe) ، نتبع الخطوات الآتية :

1- حساب الخطأ المعياري للفرق بين متوسطي أي معاملتين، وفقاً للعلاقة الآتية :

$$S_{(\overline{Y}_{i.}-\overline{Y}'_{i.})} = \sqrt{\frac{2MSE}{n}}$$

2- إستخراج قيمة (F) الجدولية، من جداول توزيع (F)، إعتماداً على درجات حرية المعاملات ($d\,f_t$)، ودرجات حرية الخطأ ($d\,f_E$)، ومستوى المعنوية المطلوب (α).

3- حساب القيمة الحرجة لشيفيه (CRs)، وفقاً للصيغة الآتية :

$$CR_s = S_{(\overline{Y}_{i.}-\overline{Y}'_{i.})} * \sqrt{(k-1) * F_{(df_t, df_E)}}$$

حيث إن :

k : تمثل عدد المعاملات في التجربة .

F : تمثل قيمة (F) الجدولية، بدرجات حرية المعاملات (df_t)، ودرجات حرية الخطأ (df_E) ، عند مستوى معنوية معين (α) .

4- حساب الفروق بين أزواج متوسطات المعاملات ($\overline{Y}_{i.}$) بعد ترتيبها تصاعدياً، ومقارنة الفروق الناتجة مع القيمة الحرجة لشيفيه (CR_s) .

5- قاعدة القرار، تنص على وجود فروق معنوية، عندما تكون الفروق المحسوبة أكبر من أو تساوي قيمة شيفيه الحرجة (CRs)، وبعكسه تكون الفروق غير معنوية .

مثال (5) :

إستخدم المعلومات الواردة بالمثال رقم (2) السابق، وذلك لاختبار الفروق بين متوسطات المعاملات الثلاثة، باستخدام إختبار شيفيه (Scheffe)، مستخدماً مستوى المعنويه ($\alpha = 0.05$) .

الحل :

لاجراء المقارنات بين متوسطات المعاملات ($\overline{Y}_{i.}$)، باستخدام إختبار شيفيه (Scheffe)، نتبع الخطوات الآتية:

1- حساب الخطأ المعياري، وفقاً للعلاقة الآتية :

$$S_{(\overline{Y}_{i.}-\overline{Y}'_{i.})} = \sqrt{\frac{2MSE}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{2(2.5714)}{8}}$$

$$= 0.802$$

2- من جداول توزيع (F)، بدرجات حرية المعاملات (df_t = 2)، ودرجات حرية الخطأ (df_E = 21)، ومستوى المعنوية (α = 0.05)، تبين إن قيمة (F) الجدولية بلغت (3.47).

3- حساب قيمة شيفيه (CRs)، وفقاً للصيغة الآتية :

$$CR_{S(0.05)} = S_{\left(\overline{Y}_{i.}-\overline{Y}'_{i.}\right)} * \sqrt{(k-1) * F_{(2,21,0.05)}}$$

$$= 0.802 * \sqrt{(3-1) * (3.47)}$$

$$= 0.802 * \sqrt{6.94}$$

$$= 2.113$$

4- حساب الفروق بين أزواج متوسطات المعاملات ($\overline{Y}_{i.}$) بعد ترتيبها تصاعدياً، ومقارنة الفروق الناتجة مع قيمة شيفيه (CRs)، كما هو موضح بالجدول الآتي :

$CR_{S(0.05)}$	$\overline{Y}_{3.}$ =12.0	$\overline{Y}_{1.}$ =7.5	$\overline{Y}_{2.}$ =4.5	المتوسطات ($\overline{Y}_{i.}$) مرتبة تصاعدياً
2.113	7.5*	3*	-	$\overline{Y}_{2.}$ = 4.5
	4.5*	-	-	$\overline{Y}_{1.}$ = 7.5
	-	-	-	$\overline{Y}_{3.}$ =12.0

5- القرار :

يتضح من نتائج الجدول السابق، بأن الفروق بين المتوسطات ($\overline{Y}_{i.}$)، هي أكبر من قيمة شيفيه (CRs) البالغة (2.113)، وهذا يعني إن الفروق الناتجة بين متوسط أي معاملتين، تُعد معنوية عند مستوى الدلالة (α = 0.05)، مما يدلل ذلك على وجود إختلافات بين أنواع السماد الكيمياوي المستخدمة في التجربة .

رابعاً : إختبار دنكن (Duncan) : Duncan's Multiple Range Test

إن أول من اقترح هذا الاختبار العالم " دنكن " (Duncan) عام (1955)، محاولةً منه لتلافي بعض العيوب في الاختبارات السابقة .

ويستند إختبار (Duncan) على قيم (S.S.R.) المختصرة من كلمات التعبير (Studentized Significant Range)، وعلى قيم المدى المعنوي الأصغر (L.S.R.) المختصرة من كلمات التعبير (Least Significant Range)، التي ستُعتمد في اجراء مقارنة الفروق بين متوسطات المعاملات.

ويُعد هذا الاختبار من أكفأ الاختبارات وأدقها لاعتماده على عدد من قيم (L.S.R.) وليس على قيمة واحدة كما هو الحال في الاختبارات السابقة، ويمكن إستخدامه بغض النظر عن معنوية إحصاءة الاختبار (F) في جدول تحليل التباين أو عدم معنويتها .

ولاجراء إختبار (Duncan)، نتبع الخطوات الآتية :

1- حساب الخطأ المعياري لمتوسط أي معاملة، وفقاً للعلاقة الآتية :

$$S_{\overline{Y}_{i.}} = \sqrt{\frac{MSE}{n}}$$

2- إستخراج قيم (S.S.R.) من الجداول الخاصة باختبار (Duncan)، إعتماداً على درجات حرية الخطأ (df_E)، وعدد المتوسطات الداخلة بالمقارنة البالغ (K)، ومستوى المعنوية المطلوب (α) .

3- حساب قيم المدى المعنوي الأصغر (L.S.R.)، وفقاً للصيغة الآتية :

$$L.S.R. = S_{\overline{Y}_{i.}} * S.S.R.$$

4- ترتيب متوسطات المعاملات الداخلة بالمقارنة ($\overline{Y}_{i.}$) ترتيباً تصاعدياً، وحساب الفروق المطلقة ومقارنتها مع قيم (L.S.R.) .

5- قاعدة القرار، تنص على وجود فروق معنوية، عندما تكون الفروق المطلقة المحسوبة أكبر من أو تساوي قيم (L.S.R.) المناسبة لاعداد المتوسطات الداخلة ضمن مدى كل مقارنة، وبعكسه تكون الفروق غير معنوية .

مثال (6) :

إستخدم المعلومات الواردة بالمثال رقم (2) السابق، وذلك لاختبار الفروق بين متوسطات المعاملات الثلاثة، باستخدام إختبار دنكن (Duncan)، مستخدماً مستوى المعنوية ($\alpha = 0.05$) .

الحل :

لإجراء المقارنات بين متوسطات المعاملات ($\overline{Y}_{i.}$)،باستخدام إختبار (Duncan)، نتبع الخطوات الآتية:

1- حساب الخطأ المعياري لمتوسط أي معاملة، كالآتي :

$$S_{\overline{Y}_{i.}} = \sqrt{\frac{MSE}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{2.5714}{8}}$$

$$= 0.567$$

2- من جداول دنكن (Duncan)، بدرجات حرية الخطأ ($df_E = 21$)، وعدد المتوسطات الداخله بالمقارنه ($k = 3$)، ومستوى المعنوية ($\alpha = 0.05$)، نحصل على قيم (S.S.R.) وهي (3.09 , 2.94) .

3- حساب قيم المدى المعنوي الأصغر (L.S.R.) ، وفقاً للصيغة الآتية :

$$L.S.R_{(0.05)} = S_{\overline{Y}_{i.}} * S.S.R$$

كما هو موضح بالجدول الآتي :

المؤشرات	عدد المتوسطات الداخلة بالمقارنة	
	2	3
S.S.R.	2.94	3.09
$S_{\overline{Y}_{i.}}$	0.567	
L.S.R.	1.667	1.752

4- ترتيب متوسطات المعاملات الداخلة بالمقارنة ($\overline{Y}_{i.}$) ترتيباً تصاعدياً، وحساب الفروق المطلقة ومقارنتها مع قيم (L.S.R.)، كما موضح بالجدول الآتي :

المعاملات $t_{i.}$	المتوسطات $\overline{Y}_{i.}$	L.S.R. $_{(0.05)}$	$\lvert \overline{Y}_{i.} - 12 \rvert$	$\lvert \overline{Y}_{i.} - 7.5 \rvert$
$t_{2.}$	4.5	1.667	7.5 *	3 *
$t_{1.}$	7.5	1.752	4.5 *	
$t_{3.}$	12.0			

5- القرار:

يتضح من النتائج الواردة بالجدول السابق، بأن الفروق المطلقة الناتجة بين متوسطي المعاملتين ($t_{2.}$) و ($t_{3.}$) والبالغة (7.5) هي أكبر من قيمة (L.S.R.) البالغة (1.667)، وكذلك إن الفروق المطلقة الناتجة بين متوسطي المعاملتين ($t_{2.}$) و ($t_{1.}$)، ومتوسطي المعاملتين ($t_{1.}$) و ($t_{3.}$) والبالغة (3) و (4.5) على الترتيب، هما أكبر من قيمة (L.S.R) البالغة (1.752)، وهذا يعني إن الفروق بين متوسطات المعاملات ($\overline{Y}_{i.}$)، تُعد معنوية عند مستوى الدلالة (α= 0.05)، مما يدلل ذلك على وجود اختلافات بين أنواع السماد الكيمياوي المستخدمة في التجربة.

خامساً : اختبار نيومان – كول (Newman – keul) :   Newman- keul Test

يعود الفضل الأول في اقتراح هذا الاختبار لـ (Newman – keul)، ويستند هذا الاختبار على قيم (Q) التي يمكن الحصول عليها من جداول (Newman – keul)، وقيم المدى المعنوي الأصغر (L.S.R.) .

ولاجراء اختبار (Newman – keul)، نتبع الخطوات الآتية :

1- حساب الخطأ المعياري لمتوسط أي معاملة، وفقاً للعلاقة الآتية:

$$S_{\overline{Y}_{i.}} = \sqrt{\frac{MSE}{n}}$$

2- إستخراج قيم (Q) من جداول (Newman – keul)، إعتماداً على درجات حرية الخطأ (df_E)، وعدد متوسطات المعاملات الداخلة بالمقارنة (k)، ومستوى المعنوية المطلوب (α).

3- حساب قيم المدى المعنوي الأصغر (L.S.R.)، وفقاً للصيغة الآتية:

$$L.S.R. = S_{\overline{Y}_{i.}} * Q$$

4- ترتيب متوسطات المعاملات الداخلة بالمقارنة ($\overline{Y}_{i.}$) ترتيباً تصاعدياً، وحساب الفروق المطلقة ومقارنتها مع قيم (L.S.R.) .

5- قاعدة القرار، تنص على وجود فروق معنوية، عندما تكون الفروق المطلقة المحسوبة أكبر من أو تساوي قيم (L.S.R.) المناسبة لاعداد المتوسطات الداخلة ضمن مدى كل مقارنة، وبعكسه تكون الفروق غير معنوية .

مثال (7) :

إستخدم المعلومات الواردة بالمثال رقم (2) السابق، وذلك لاختبار الفروق بين متوسطات المعاملات الثلاثـة، باستخدام إختبـار نيومان – كول (Newman–keul)، مستخدماً مستوى المعنوية . (α = 0.05)

الحل :

لاجراء المقارنات بين متوسطات المعاملات ($\overline{Y}_{i.}$)، باستخدام إختبار (Newman – keul)، نتبع الخطوات الآتية :

1- حساب الخطأ المعياري لمتوسط أي معاملة، وفقاً للعلاقة الآتية :

$$S_{\overline{Y}_{i.}} = \sqrt{\frac{MSE}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{2.5714}{8}}$$

$$= 0.567$$

2- من جداول توزيع (Q)، لنيومان – كول (Newman – keul)، بدرجات حرية الخطأ ($df_E = 21$)، وعدد المتوسطات الداخلة بالمقارنة (k=3)، ومستوى المعنوية ($\alpha = 0.05$)، نحصل على قيم (Q) وهي (3.56 ، 2.94) .

3- حساب قيم المدى المعنوي الأصغر (L.S.R)، وفقاً للصيغة الآتية :

$$L.S.R_{(0.05)} = S_{\overline{Y}_{i.}} * Q$$

كما هو موضح بالجدول الآتي :

المؤشرات	عدد المتوسطات الداخلة بالمقارنة	
	2	3
S.S.R.	2.94	3.56
$S_{\overline{Y}_{i.}}$	0.567	
L.S.R.	1.667	2.019

4- ترتيب متوسطات المعاملات الداخلة بالمقارنة ($\overline{Y}_{i.}$) ترتيباً تصاعدياً، وحساب الفروق المطلقة بين المتوسطات، ومقارنتها مع قيم (L.S.R.)، كما موضح بالجدول الآتي:

المعاملات $t_{i.}$	المتوسطات $\overline{Y}_{i.}$	L.S.R. $_{(0.05)}$	$\lvert\overline{Y}_{i.} - 12\rvert$	$\lvert\overline{Y}_{i.} - 7.5\rvert$
$t_{2.}$	4.5	1.667	7.5 *	3 *
$t_{1.}$	7.5	2.019	4.5 *	
$t_{3.}$	12.0			

5- القرار :

يتضح من نتائج الجدول أعلاه، بأن الفروق المطلقة الناتجة بين متوسطي المعاملتين ($t_{2.}$) و ($t_{3.}$) والبالغة (7.5) هي أكبر من قيمة (L.S.R.) البالغة (1.667)، وكذلك إن الفروق المطلقة الناتجة بين متوسطي المعاملتين ($t_{2.}$) و ($t_{1.}$)، ومتوسطي المعاملتين ($t_{1.}$) و ($t_{3.}$) والبالغة (3) و (4.5) على الترتيب، هما أكبر من قيمة (L.S.R) البالغة (2.019)، وهذا يعني إن الفروق بين متوسطات المعاملات ($\overline{Y}_{i.}$)، تُعد معنوية عند مستوى الدلالة (α = 0.05)، مما يدلل ذلك على وجود اختلافات بين أنواع السماد الكيمياوي المستخدمة في التجربة.

4-6 : تحليل التباين باتجاهين : Two-way Analysis of Variance

عند دراستنا لأسلوب تحليل التباين باتجاه واحد، افترضنا وجود متغير أو مؤثر واحد على المتغير المعتمد (Y_{ij})، وإن ما يتبقى من اختلاف أو تأثير بعد حساب أثر المتغير المدروس، فإنه يُعزى الى العوامل العشوائية أو الصدفة.

ولكن الحالة تختلف عند دراسة أسلوب التباين باتجاهين، فإن هذا الأسلوب يفترض دراسة تأثير متغيرين، أحدهما يمثل الصفوف (Rows)، أما الآخر فيمثل الأعمدة (Columns)، على المتغير المعتمد (Y_{ij})، مثال ذلك دراسة تأثير المستوى العلاجي للمرضى وأساليب المعالجة المتبعة على متوسط نسبة الشفاء من المرض (Y_{ij}) .

ويُعد أسلوب تحليل التباين باتجاهين، من أكثر الأساليب إستخداماً على مستوى الدراسات التربوية وعلم النفس والاجتماع، فعلى سبيل المثال يستخدم هذا الأسلوب لدراسة تأثير طرق التدريس ومستويات الطلبه على تحصيلهم العلمي، بالإضافة الى استخداماته في مجال الزراعة والصناعة والطب والإدارة وغيرها من العلوم الأخرى .

والجدول التالي، يوضح المشاهدات بواقع مشاهدة واحدة لكل خلية، إذ تشير المشاهدة (Y_{ij}) في العمود (j) المخصصة للصف رقم (i) .

الصفوف Rows	الأعمدة (Columns)						Total	Means
	1	2	……	j	……	c		
1	Y_{11}	Y_{12}	……	Y_{1j}	……	Y_{1c}	$Y_{1.}$	$\overline{Y}_{1.}$
2	Y_{21}	Y_{22}	……	Y_{2j}	……	Y_{2c}	$Y_{2.}$	$Y_{2.}$
:	:	:	……	:	……	:	:	:
i	Y_{i1}	Y_{i2}	……	Y_{ij}	……	Y_{ic}	$Y_{i.}$	$\overline{Y}_{i.}$
:	:	:	……	:	……	:	:	:
r	Y_{r1}	Y_{r2}	……	Y_{rj}	……	Y_{rc}	$Y_{r.}$	$\overline{Y}_{r.}$
Total	$Y_{.1}$	$Y_{.2}$	……	$Y_{.j}$	……	$Y_{.c}$	$Y_{..}$	-
Means	$\overline{Y}_{.1}$	$\overline{Y}_{.2}$	……	$\overline{Y}_{.j}$	……	$\overline{Y}_{.c}$	-	$\overline{Y}_{..}$

حيث إن:

$Y_{i.}$: تمثل مجموع مشاهدات الصف رقم (i) .

$\overline{Y}_{i.}$: تمثل متوسط مشاهدات الصف رقم (i) .

$Y_{.j}$: تمثل مجموع مشاهدات العمود رقم (j) .

$\overline{Y}_{.j}$: تمثل متوسط مشاهدات العمود رقم (j) .

$Y_{..}$: تمثل مجموع المشاهدات الكلية .

$\overline{Y}_{..}$: تمثل المتوسط العام للمشاهدات الكلية .

وبناءاً على ما تقدم ، يمكن تمثيل المشاهدة (Y_{ij}) ، بالنموذج الآتي :

$$Y_{ij} = \mu_{ij} + \varepsilon_{ij} \qquad \text{.............. (8)}$$

حيث إن :

Y_{ij} : تمثل قيمة المشاهدة في العمود (j) المخصصة للصف رقم (i) .

μ_{ij} : تمثل متوسط المجتمع .

ε_{ij} : تمثل مقياس إنحراف المشاهدة (Y_{ij}) عن متوسط المجتمع (μ_{ij}) .

يمكن إعادة كتابة المعادلة رقم (8)، بعد التعويض عن (μ_{ij}) بما يساويها، إذ إن :

$$\mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j$$

عليه يكون النموذج البديل للمشاهدة (Y_{ij}) ، موضح بالشكل الآتي :

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} \qquad \text{..............(9)}$$

$$(i = 1,2, \ldots..r \qquad , \qquad j = 1,2, \ldots..,c)$$

تحت القيد $\left(\sum_{i}^{r} \alpha_i = \sum_{j}^{c} \beta_i = 0 \right)$.

حيث إن :

μ : يمثل المتوسط العام .

α_i : يمثل تأثير الصف رقم (i) .

β_j : يمثل تأثير العمود رقم (j) .

وتأسيساً على ما تقدم، تكون الفرضيات الإحصائية المكافئة للنموذج رقم (9)، على النحو الآتي :

(1) الفرضية الخاصة باختبار الفروق بين معدلات الصفوف (Rows) :

$H_0: \ \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_r = 0$.

H_1 : At Least one of (α_i) is not equal to (Zero) .

(2) الفرضية الخاصة باختبار الفروق بين معدلات الأعمدة (Columns):

$H'_0: \ \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_c = 0$

H'_1: At Least one of (β_j) is not equal to (Zero).

وبناءاً على ما تقدم، فإن أسلوب تحليل التباين باتجاهين، ينطوي على تجزئة مجموع المربعات الكلي إلى ثلاث مركبات تتمثل بـ (مجموع مربعات يُعزى للتفاوت بين الصفوف، ومجموع مربعات يُعزى للتفاوت بين الأعمدة، والثالثة تمثل مجموع مربعات تُعزى للخطأ التجريبي)، أي إن :

$$\sum_{i}^{r}\sum_{j}^{c}\left(Y_{ij}-\overline{Y}..\right)^2 = \sum_{i}^{r}\sum_{j}^{c}\left(\overline{Y}_{i.}-\overline{Y}..\right)^2 + \sum_{i}^{r}\sum_{j}^{c}\left(\overline{Y}_{.j}-\overline{Y}..\right)^2 + \sum_{i}^{r}\sum_{j}^{c}\left(Y_{ij}-\overline{Y}_{i.}-\overline{Y}_{.j}-\overline{Y}..\right)^2$$

$$= c\sum_{i}^{r}\left(\overline{Y}_{i.}-\overline{Y}..\right)^2 + r\sum_{j}^{c}\left(\overline{Y}_{.j}-\overline{Y}..\right)^2 + \sum_{i}^{r}\sum_{j}^{c}\left(Y_{ij}-\overline{Y}_{i.}-\overline{Y}_{.j}-\overline{Y}..\right)^2 \qquad \dots (10)$$

إن مكونات العلاقة رقم (10)، يمكن التعبير عنها بدلالة مجموع المربعات (Sum of Squares)، أي إن :

$$SST = SSR + SSC + SSE \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

حيث إن :

SST : تمثل مجموع المربعات الكلي (Total Sum of Squares).

SSR : تمثل مجموع مربعات الصفوف (Rows Sum of Squares).

SSC : تمثل مجموع مربعات الأعمدة (Columns Sum of Squares).

SSE : تمثل مجموع مربعات الخطأ (Error Sum of Squares).

ولأغراض الحساب، وبناء جدول تحليل التباين (ANOVA)، يمكن استخدام المعادلات التالية، للحصول على مجموع المربعات الكلي ومركباته الثلاثة المتمثلة بـ (SST , SSR , SSC , SSE)، وعلى النحو الآتي :

$$SST = \sum_{i}^{r}\sum_{j}^{c} Y_{ij}^2 - rc\overline{Y}_{..}^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

$$SSR = c\sum_{i}^{r} \overline{Y}_{i.}^2 - rc\overline{Y}_{..}^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

$$SSC = r\sum_{j}^{c} \overline{Y}_{.j}^2 - rc\overline{Y}_{..}^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

$$SSE = SST - SSR - SSC \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

والجدول التالي، يوضح مكونات جدول تحليل التباين باتجاهين:

مصدر الاختلاف Source of Variation	مجموع المربعات Sum of Squares	درجات الحرية Degrees of Freedom	متوسط المربعات Mean of Squares	قيمة(F) المحسوبة Fratio
بين معدلات الصفوف	SSR	r-1	$MSR = \frac{SSR}{r-1}$	$F_r = \frac{MSR}{MSE}$
بين معدلات الأعمدة	SSC	c-1	$MSC = \frac{SSC}{c-1}$	$F_c = \frac{MSC}{MSE}$
الخطأ التجريبي	SSE	(r-1)(c-1)	$MSE = \frac{SSE}{(r-1)(c-1)}$	-
الكلي	SST	rc-1	-	-

بعد ذلك يتم مقارنة قيم (F) المحسوبة لكل من الصفوف والأعمدة، مع قيمة (F) الجدولية التي يتم الحصول عليها من جداول توزيع (F)، بدرجتي حرية البسط والمقام، عند مستوى معنوية معين (α).

قاعدة القرار :

(1) إذا كانت قيمة (F_r) المحسوبة للصفوف أكبر من أو تساوي قيمة (F) الجدولية، يدلل ذلك على رفض فرضية العدم (H_0)، وهذا يعني وجود فروق معنوية بين معدلات الصفوف، عند مستوى المعنوية (α) ، وبعكسه يتم قبول الفرضية (H_0)، مما يعني عدم وجود فروق بين معدلات الصفوف .

(2) إذا كانت قيمة (F_c) المحسوبة للأعمدة أكبر من أو تساوي قيمة (F) الجدولية، يدلل ذلك على رفض فرضية العدم (H_0)، وهذا يعني وجود فروق معنوية بين معدلات الأعمدة، عند مستوى المعنوية (α)، وبعكسه يتم قبول الفرضية (H_0)، مما يعني عدم وجود فروق بين معدلات الأعمدة .

مثال (8):

البيانات الموضحة بالجدول التالي، تمثل الإنتاجية (كغم/دونم)، لثلاثة أصناف من محصول الحنطة، عُوملت الأراضي الزراعية بثلاثة أنواع من السماد الكيمياوي المركب، بافتراض بقاء العوامل الأخرى ثابتة .

أنواع السماد الكيمياوي المركب	أصناف الحنطة			Total
	W_1	W_2	W_3	
t_1	95	100	105	300
t_2	70	110	60	240
t_3	60	105	105	270
Total	225	315	270	810

المطلوب :

1) صياغة الفرضيات الاحصائية للتجربة أعلاه .
2) إستخدام إسلوب تحليل التباين باتجاهين، مستخدماً مستوى المعنوية (0.05)، لاختبار الفروق بين :
   أ- أنواع السماد الكيمياوي المركب .
   ب- أصناف الحنطة .

الحل :

1) الفرضيات الإحصائية :

أ. الفرضية الإحصائية الخاصة باختبار الفروق بين أنواع السماد (Rows):

$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

H_1 : At Least one of (α_i) is not equal to (Zero)

ب. الفرضية الإحصائية الخاصة باختبار الفروق بين أصناف الحنطة (Columns) :

$H_0^{/} : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$

$H_1^{/}$: At Least one of (β_j) is not equal to (Zero) .

2) لبناء جدول تحليل التباين باتجاهين (Two-Way ANOVA)، نقوم بحساب متوسطات الصفوف $\left(\overline{Y}_{i.}\right)$ والأعمدة $\left(\overline{Y}_{.j}\right)$، ومجاميع المربعات، على النحو الآتي:

أ) حساب متوسطات الصفوف $\left(\overline{Y}_{i.}\right)$:

$$\overline{Y}_{1.} = \frac{300}{3} = 100$$

$$\overline{Y}_{2.} = \frac{240}{3} = 80$$

$$\overline{Y}_{3.} = \frac{270}{3} = 90$$

ب) حساب متوسطات الأعمدة $\left(\overline{Y}_{.j}\right)$:

$$\overline{Y}_{.1} = \frac{225}{3} = 75$$

$$\overline{Y}_{.2} = \frac{315}{3} = 105$$

$$\overline{Y}_{.3} = \frac{270}{3} = 90$$

عليه يكون المتوسط العام $\left(\overline{Y}_{..}\right)$، كالآتي :

$$\overline{Y}_{..} = \frac{100 + 80 + 90}{3}$$

$$= 90$$

أو يمكن ايجاد $\left(\overline{Y}_{..}\right)$ ، وفقاً للعلاقة الآتية :

$$\overline{Y}_{..} = \frac{\sum_{i}^{3}\sum_{j}^{3} Y_{ij}}{rc}$$

$$= \frac{810}{3(3)}$$

$= 90$

ج) حساب مجموع المربعات (SSE , SSC , SSR , SST) ، كالآتي :

$$SST = \sum_{i}^{3}\sum_{j}^{3} Y_{ij}^2 - rc\overline{Y}_{..}^2$$

$$= \left[(95)^2 + (100)^2 + \ldots + (105)^2\right] - 3(3)(90)^2$$

$= 76300 - 72900$

$= 3400$

$$SSR = c\sum_{i}^{3} \overline{Y}_{i.}^2 - rc\overline{Y}_{..}^2$$

$$= 3\left[(100)^2 + (80)^2 + (90)^2\right] - 3(3)(90)^2$$

$= 73500 - 72900$

$= 600$

$$SSC = r\sum_{j}^{3} \overline{Y}_{.j}^2 - rc\overline{Y}_{..}^2$$

$$= 3\left[(75)^2 + (105)^2 + (90)^2\right] - 3(3)(90)^2$$

$= 74250 - 72900$

$= 1350$

$\therefore$ SSE $= SST - SSR - SSC$

$= 3400 - 600 - 1350$

$= 1450$

عليه يكون جدول تحليل التباين باتجاهين (Two – Way ANOVA)، كالآتي :

مصدر الاختلاف S.O.V.	مجموع المربعات SS	درجات الحرية df.	متوسط المربعات MS	قيمة (F) المحسوبة Fratio
بين معدلات الصفوف (بين أنواع السماد)	600	2	300	$F_r = 0.828$
بين معدلات الأعمدة (بين أصناف الحنطة)	1350	2	675	$F_c = 1.862$
الخطأ التجريبي	1450	4	362.5	-
الكلي	3400	8	-	-

من جداول توزيع (F)، وبدرجتي حرية البسط والمقام (2، 4)، ومستوى المعنوية ($\alpha = 0.05$)، حصلنا على قيمة (F) الجدولية، [$F_{(2,4,0.05)} = 6.94$] .

القرار :

(1) يتضح من جدول تحليل التباين، بأن قيمة (Fr) المحسوبة للصفوف، بلغت (0.828) وهي أقل من قيمة (F) الجدولية البالغة (6.94)، عند مستوى المعنوية (0.05)، مما يدلل ذلك على قبول فرضية العدم (H_0)، وهذا يعني عدم وجود فروق معنوية بين أنواع السماد الكيمياوي المركب، أي إن($\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$).

(2) ويتضح أيضاً، بأن قيمة (Fc) المحسوبة للأعمدة ، بلغت (1.862) وهي أقل من قيمة (F) الجدولية البالغة (6.94)، عند مستوى المعنوية (0.05)، مما يدلل ذلك على قبول فرضية العدم ($H_0^{/}$) ، وهذا يعني عدم وجود فروق معنوية بين أصناف الحنطة ، أي إن ($\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$) .

أسئلة عامة حول الفصل السادس

س1 : تم تطبيق أربعة طرق تدريسية على أربعة مجموعات من طلبة الصف الثاني المتوسط، بواقع ستة طلاب لكل مجموعة، تم تدريسهم طريقة حل المعادلات الآنية في موضوع الرياضيات، وكانت نتائج اختبار الطلبة، موضحة بالجدول الآتي :

طرق التدريس	نتائج الاختيار (Y_{ij})						Total
	1	2	3	4	5	6	
A	80	100	90	70	60	80	480
B	60	70	50	80	70	90	420
C	80	70	100	60	50	30	390
D	60	80	40	50	90	46	366
Total	-	-	-	-	-	-	1656

المطلوب :

أختبر الفرضية الإحصائية الآتية :

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$

H_1 : At Least two means are not equal .

باستخدام إسلوب تحليل التباين الاحادي، لاختبار الفروق بين متوسطات نتائج إختبار طرق التدريس الأربعة، مستخدماً مستوى المعنوية $(\alpha = 0.05)$.

س2 : البيانات الموضحة بالجدول التالي ، تمثل ثلاث إختبارات لمجاميع مختلفة من طلبة جامعة فيلادلفيا، بواقع (8) طلاب لكل مجموعة، تم تدريسهم مساق الإحصاء التطبيقي ، من قبل ثلاثة تدريسيين .

التدريسيون	نتائج الاختبار (Y_{ij})								Total
	1	2	3	4	5	6	7	8	
I	60	55	50	62	70	64	58	45	464
II	80	72	82	85	86	84	90	93	672
III	65	75	68	82	80	70	74	78	592
Total	-	-	-	-	-	-	-	-	1728

المطلوب :

1) صياغة الفرضية الإحصائية للتجربة أعلاه .
2) استخدم أسلوب تحليل التباين الاحادي، لاختبار الفروق بين متوسطات النتائج المتحققة للتدريسيين الثلاثة، مستخدماً مستوى المعنوية ($\alpha = 0.01$) .

س3 : لديك جدول تحليل التباين الآتي :

مصدر الاختلاف S.O.V	مجموع المربعات SS	درجات الحرية df.	متوسط المربعات MS	قيمة (F) المحسوبة Fratio
بين المعاملات	155	-	-	
الخطأ	-	36	-	
الكلي	200	39	-	-

المطلوب :

1) إكمل جدول تحليل التباين أعلاه، ذاكراً نوع التصميم المستخدم .
2) إختبر الفروق بين متوسطات المعـاملات $\left[\overline{Y}_{4.} = 15, \overline{Y}_{3.} = 4, \overline{Y}_{2.} = 6, \overline{Y}_{1.} = 9\right]$، باسـتخدام إختبار شيفيه (Scheffe)، مستخدماً مستوى المعنوية ($\alpha = 0.01$) .

س4 : لديك جدول تحليل التباين الآتي :

مصدر الاختلاف S.O.V	مجموع المربعات SS	درجات الحرية df.	متوسط المربعات MS	قيمة (F) المحسوبة Fratio
بين الأصناف	280	2	140	14.00
الخطأ	70	7	10	
الكلي	350	9	-	-

المطلوب :

1) حدد نوع التصميم المستخدم، ثم اختبر الفروق بين الأصناف، مستخدماً مستوى المعنوية ($\alpha = 0.05$).

2) كم عدد الأًصناف الداخلة في التجربة ؟ وكم عدد المشاهدات التي تم تحليلها ؟

3) اختبر الفروق بين متوسطات الأصناف $\left[\overline{Y}_{3.} = 15.1, \overline{Y}_{2.} = 8.2, \overline{Y}_{1.} = 11.3\right]$، باستخدام اختبار نيومان – كول (Newman – keul)، مستخدماً ($\alpha = 0.05$).

س5 : في تجربة بيطرية لدراسة تأثير أربعة أنواع من العلائق الغذائية على زيادة وزن عدد من الأبقار تنتمي لثلاث سلالات مختلفة، وبعد الانتهاء من التجربة، تم الحصول على نتائج الزيادة في وزن الأبقار (كغم) ، كما موضح بالجدول الآتي:

السلالة	نوع العليقة				Total
	A	B	C	D	
I	22.1	23.2	26.3	25.2	96.8
II	26.2	27.1	26.7	27.2	107.2
III	29.1	28.0	27.1	28.6	112.8
Total	77.4	78.3	80.1	81.0	316.8

المطلوب:

1- صياغة الفرضيات الاحصائية للتجربة أعلاه.

2- استخدام اسلوب تحليل التباين باتجاهين، مستخدماً مستوى المعنوية ($\alpha = 0.05$)، لاختبار الفروق بين :

أ- انواع العلائق الغذائية.

ب-السلالات الثلاثة.

س6: لديك جدول تحليل التباين الآتي:

مصدر الاختلاف S.O.V	مجموع المربعات SS	درجات الحرية df.	متوسط المربعات MS	قيمة (F) المحسوبة Fratio
بين العمال	-	-	5.23	Fr =
بين انتاجية المكائن	225.63	-	75.21	Fc =
الخطأ التجريبي	26.45	-	-	-
الكلي	262.54	11	-	-

المطلوب:

1- اكمل جدول تحليل التباين اعلاه، محددا نوع التصميم المستخدم.

2- حدد عدد المكائن المستخدمة في العملية الانتاجية، ثم اختبر الفروق بين متوسطات العمال ومتوسطات المكائن، مستخدما ($\alpha = 0.05$).

3- اختبر الفروق بين متوسطات المكائن الانتاجية، اذا علمت بان متوسطاتها بلغت $\left[\overline{Y}_{4.} = 72, \overline{Y}_{3.} = 45, \overline{Y}_{2.} = 60, \overline{Y}_{1.} = 52\right]$، باستخدام اختبار شيفيه (Scheffe)، مستخدما ($\alpha = 0.05$).

الفصل السابع
الاختبارات اللامعلمية
Non – Parametric Tests

1-7 : مقدمة :

يتضمن هذا الفصل دراسة بعض الطرق والاساليب الاحصائية التي لا تعتمد على خاصية التوزيع الطبيعي (Normal Distribution)، أو أي توزيع آخر من التوزيعات التي تم دراستها في الفصول السابقة، إذ إن التوزيعات التي سيتم استعراضها قد تكون من التوزيعات المتصلة والمتماثلة التي لا تخضع للتوزيع الطبيعي، أو إن التوزيعات المقرر دراستها تكون غير معروفة، عليه فإن الطرق الاحصائية التي سيتم استخدامها لهذا النوع من التوزيعات يطلق عليها تسمية "الطرق غير المعلمية" (Non-Parametric Methods)، التي لا تعتمد على معلمات أو مؤشرات إحصائية، على غرار الطرق السابقة التي يطلق عليها "الطرق المعلمية" (Parametric Methods)، التي تعتمد بالدرجة الاساس على بعض المعلمات او المؤشرات لنوع معين من التوزيعات الاحصائية المعروفة.

وتكون الاختبارات اللامعلمية على عدة أنواع، نوجزها بالآتي:

1- إختبار ولكوكسن لاشارة الرتب — Wilcoxon Signed Ranks Test
2- إختبار ولكوكسن لاشارة رتب الفرق المزدوج — Wilcoxon Matched-Pairs Signed Ranks Test.
3- إختبار ولكوكس لمجموع الرتب — Wilcoxon Ranks sum Test
4- إختبار مان - وتني — Mann –Whitney Test
5- إختبار كروسكال - والز — Kruskal – Wallis Test
6- إختبار فريدمان — Friedman Test

7- إختبار معامل إرتباط الرتب لسبيرمان	Spearman's Ranks Correlation Test
8- إختبار مربع كاي (χ^2)	Chi-Square Test

وفيما يلي شرح مفصل لكل إختبار من الاختبارات السابقة، وعلى النحو الآتي:

2-7: إختبار ولكوكسن لاشارة الرتب: The Wilcoxon Signed Ranks Test

إن أول من اقترح هذا الاختبار هو العالم "فرانك ولكوكسن" (Frank Wilcoxon) عام (1945)، ويستخدم إختبار ولكوكسن لاشارة الرتب، لاختبار الفرق بين متوسط مجتمع متصل ومتماثل عن قيمة معينة ولتكن (μ_0) دون تحديد نوع التوزيع، ويشترط إستخدامه عندما يتراوح عدد مشاهدات عينة المجتمع بين ($7 \le n \le 20$).

وتتلخص خطوات هذا الاختبار، بما يأتي:

1- تحديد الفرضية الاحصائية المطلوب إختبارها، على النحو الآتي:

$H_0: \mu = \mu_0.$

مقابل أحد اشكال الفرضية البديلة (H_1):

$H_1: \mu < \mu_0$

$H_1: \mu > \mu_0$

$H_1: \mu \neq \mu_0$

2- تحديد مستوى المعنوية (α) .

3- حساب إحصاءة الاختبار [W^+ أو W^- أو W]، وفقا للخطوات الآتية:

أ- إيجاد الفروق (d_i) بين قيم (X) والقيمة (μ_0) ، أي إن [$d_i = X_i - \mu_0$] .

ب- تحديد رتب للقيم المطلقة للفروق ($|d_i|$)، أي إن [Rank $|d_i|$] .

ج- تثبيت إشارة الفروق (d_i) أمام رتب القيم المطلقة للفروق [Rank $|d_i|$] .

د- حساب إحصاءة الاختبار وفقا لشكل الفرضية البديلة (H_1)، كالاتي:

$$W^{+} = \sum R_i^{+}$$

$$W^{-} = \sum R_i^{-}$$

$$W = \text{Min}\ (W^{+}, W^{-})$$

حيث إن:

W^{+} : تمثل مجموع رتب الفروق الموجبة.

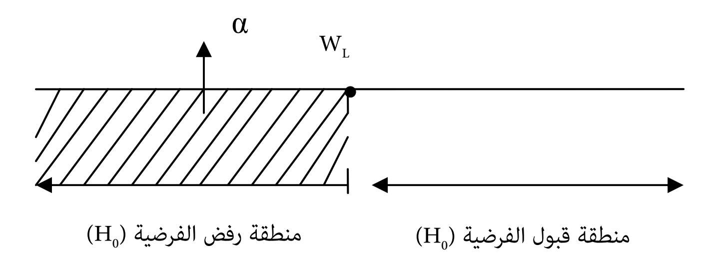
W^{-} : تمثل مجموع رتب الفروق السالبة.

W : تمثل أقل قيمة من بين القيمتين (W^{-}, W^{+}).

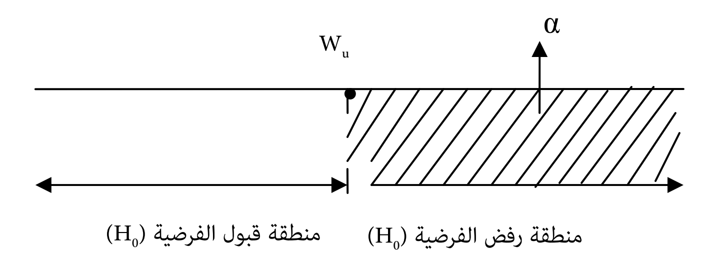
4- استخراج قيم ولكوكسن الجدولية (W_u, W_L) من الجدوال الخاصة باختبار (Wilcoxon Signed Ranks)، إعتمادا على عدد المشاهدات (n)، ومستوى المعنوية (α)، في ضوء شكل الفرضية البديلة (H_1).

5- تحديد منطقة رفض فرضية العدم (H_0)، وفقا لشكل الفرضية البديلة (H_1)، كما موضحة على النحو الآتي:

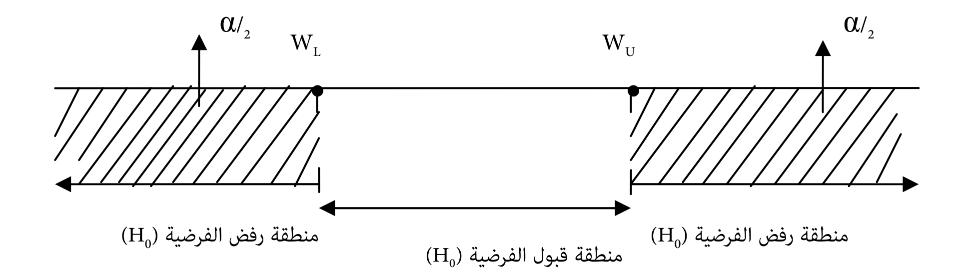
(a) $H_1: \mu < \mu_0$



(b) $H_1: \mu > \mu_0$



(c) $H_1 : = \mu \neq \mu_0$



6- قاعدة القرار:

تنص القاعدة على رفض فرضية العدم (H_0)، في الحالات الآتية:

أ- إذا كانت قيمة إحصاءة الاختبار (W^+)، أقل من أو تساوي القيمة الحرجة للاختبار (W_L)، أي إن $[W^+ \leq W_L]$ ، وبعكسه يتم قبول فرضية العدم (H_0).

ب- إذا كانت قيمة إحصاءة الاختبار (W^-)، أكبر من أو تساوي القيمة الحرجة للاختبار (Wu)، أي إن $[W^- \geq Wu]$ ، وبعكسه يتم قبول فرضية العدم (H_0).

ج- إذا كانت قيمة إحصاءة الاختبار (W)، إما أقل من أو تساوي القيمة الحرجة للاختبار (W_L)، أو أكبر من أو تساوي القيمة الحرجة للاختبار (Wu)، ويتم

د-قبول الفرضية (H_0)، عندما تقع قيمة احصاءة الاختبار (W)، ضمن المجال $[W_L < W < Wu]$.

والجدول التالي، يلخص إجراءات إختبار ولكوكسن لاشارة الرتب:

فرضيتا الاختبار		إحصاءة الاختبار	منطقة رفض فرضية العدم (H_0)
فرضية العدم(H_0)	أشكال الفرضية البديلة (H_1)		
$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$	W^+	$W^+ \leq W_L$
	$\mu > \mu_0$	W^-	$W^- \geq Wu$
	$\mu \neq \mu_0$	W	[$W \geq Wu$ أو $W \leq W_L$]

أما عندما يكون عدد المشاهدات (n) كبير، أي إن ($n > 15$)، ففي هذه الحالة نقوم باستخدام التوزيع الطبيعي المعياري، كتوزيع تقريبي لاجراء إختبار ولكوكسن لاشارة الرتب، وتأخذ إحصاءة الاختبار في ضوء الفرضية البديلة ($\mu \neq \mu_0$)، الشكل الآتي:

$$Z = \frac{W - \mu_W}{\sigma_w}$$

حيث إن:

$$\mu_w = \frac{n(n+1)}{4}$$

$$\sigma_w = \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}$$

ولاتخاذ القرار الاحصائي حول رفض أو عدم رفض فرضية العدم (H_0)، يتم مقارنة القيمة المطلقة لاحصاءة الاختبار المحسوبة ($| Z |$) مع القيمة الجدولية ($Z_{tab.}$)، إعتمادا على مستوى المعنوية (α)، وشكل الفرضية البديلة (H_1).

والجدول التالي، يوضح بعض القيم الجدولية الخاصة والشائعة الاستخدام لـ (Z) التي تخضع للتوزيع الطبيعي المعياري.

$\mu \neq \mu_0$	$\mu < \mu_0 , \mu > \mu_0$	الفرضية البديلة(H_1)
$Z_{\alpha/2}$	A	α
1.645	1.282	10%
1.960	1.645	5%
2.576	2.326	1%

قاعدة القرار:

تنص القاعدة على رفض فرضية العدم (H_0)، عندما تكون القيمة المطلقة لاحصاءة الاختبار المحسوبة ($|Z|$)، أكبر من أو تساوي القيمة الجدولية ($Z_{tab.}$)، أي إن [$|Z| \geq Z_{tab.}$] ، وهذا يعني توجد فروق معنوية بين متوسط المجتمع (μ) والقيمة المحددة (μ_0)، عند مستوى المعنوية (α)، وبعكسه يتم قبول فرضية العدم (H_0).

مثال (1):

البيانات التالية، تمثل مقدار الزيادة (غم) في اوزان (10) حيوانات مختبرية، تم اطعامها بغذاء خاص منذ ولادتها وحتى عمر (3) أشهر.

مقدار الزيادة	79	63	64	65	76	74	66	67	69	77

المطلوب:

هل إن مقدار الزيادة الحاصلة في اوزان الحيوانات المختبرية، تعطي دليلا كافيا بأن متوسط زيادة الوزن لا يساوي (70)غم؟ استخدم مستوى المعنوية ($\alpha = 0.01$).

الحل:

1- الفرضية الاحصائية المطلوب إختبارها، هي:

$H_0: \mu = 70$

$H_1: \mu \neq 70$

2- حساب إحصاءة الاختبار (W)، كالاتي:

مقدار الزيادة X_i	الفروق عن القيمة (70) $d_i = X_i - 70$	الفروق المطلقة $\|d_i\|$	رتب الفروق المطلقة Rank $\|d_i\|$	إشارة الرتب Rank $\|d_i\|$
79	9	9	10	+ 10
63	-7	7	8.5	- 8.5
64	-6	6	6.5	-6.5
65	-5	5	5	-5
76	6	6	6.5	+6.5
74	4	4	3.5	+3.5
66	-4	4	3.5	-3.5
67	-3	3	2	-2
69	-1	1	1	-1
77	7	7	8.5	+8.5

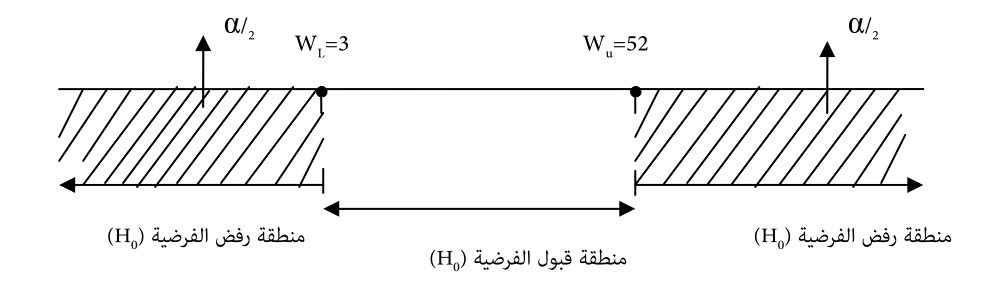
$$\therefore W^+ = \sum R_i^+ = 28.5$$

$$W^- = \sum R_i^- = 26.5$$

$$\therefore W = Min(W^+, W^-) = Min(28.5, 26.5) = 26.5$$

3- **من جداول ولكوكسن لاشارة الرتب**، إعتمادا على عدد المشاهدات ($n = 10$)، ومستوى المعنوية ($\alpha = 0.01$)، تبين إن القيم الحرجة لاختبار ولكوكسن (Wilcoxon)، هي $[W_u = 52 , W_L = 3]$.

4- **تحديد مناطق رفض فرضية العدم (H_0)، كالآتي:**



5- قاعدة القرار:

بما إن قيمة إحصاءة الاختبار (W) البالغة (26.5)، تقع ضمن منطقة قبول فرضية العدم (H_0)، أي إن ($3 < W < 52$)، عليه سيتم قبول (عدم رفض) الفرضية (H_0)، وهذا يعني إن ($\mu = 70$).

مثال (2):

البيانات التالية، تمثل مقدار الزيادة (غم) في أوزان (14) حيوان مختبري، تم إطعامها بغذاء خاص منذ ولادتها وحتى عمر (3) أشهر.

مقدار الزيادة (X)	63	68	65	64	63	65	64
	76	74	66	66	67	73	69

المطلوب:

هل يمكن الاستنتاج بأن متوسط زيادة الوزن يزيد على (70) غم، في ضوء الزيادة باوزان الحيوانات المختبرية؟ إستخدم مستوى المعنوية ($\alpha = 0.05$).

الحل:

1- الفرضية الاحصائية المطلوب إختبارها، هي:

$H_0 : \mu = 70$

$H_1 : \mu > 70$

2- حساب إحصاءة الاختبار (W^-) في ضوء الفرضية البديلة (H_1)، كالآتي:

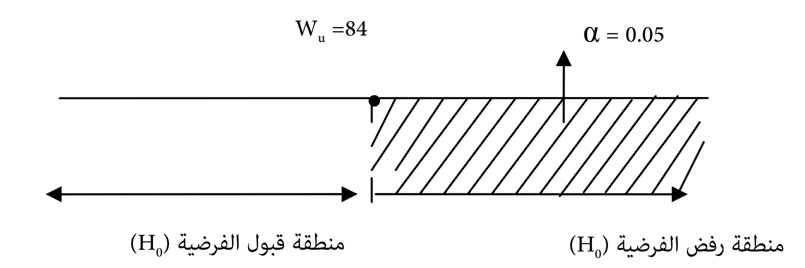
X_i	$d_i = X_i - 70$	$\lvert d_i \rvert$	Rank $\lvert d_i \rvert$	إشارة الرتب Rank $\lvert d_i \rvert$
63	-7	7	13.5	-13.5
68	-2	2	2	-2
65	-5	5	8.5	-8.5
64	-6	6	11	-11
63	-7	7	13.5	-13.5
65	-5	5	8.5	-8.5
64	-6	6	11	-11
76	6	6	11	+11
74	4	4	6	+6
66	-4	4	6	-6
66	-4	4	6	-6
67	-3	3	3.5	-3.5
73	3	3	3.5	+3.5
69	-1	1	1	-1

$$\therefore W^- = \sum R_i^-$$

$$= 84.5$$

3- **من جداول ولكوكسن لاشارة الرتب**، اعتمادا على عدد المشاهدات ($n = 14$)، ومستوى المعنوية ($\alpha = 0.05$)، تبين إن القيمة الحرجة لاختبار ولكوكسن (Wilcoxon)، بلغت ($W_u = 84$).

4- **تحديد منطقة رفض فرضية العدم (H_0)، كالآتي:**



5- **قاعدة القرار:**

بما إن قيمة إحصاءة الاختبار (W^-) البالغة (84.5)، تقع ضمن منطقة رفض فرضية العدم (H_0)، أي إن ($W^- > 84$)، عليه سيتم رفض الفرضية (H_0)، وهذا يعني يمكن الاستنتاج بأن متوسط زيادة الوزن (μ) يزيد على (70) غم، في ضوء نتائج الزيادة في أوزان الحيوانات المختبرية، عند مستوى المعنوية ($\alpha = 0.05$).

مثال (3):

البيانات التالية، تمثل مقدار الزيادة (غم) في أوزان (16) حيوان مختبري، تم إطعامها بغذاء خاص منذ ولادتها وحتى عمر (3) أشهر.

مقدار الزيادة (X)	63	68	79	65	64	63	65	64
	76	74	66	66	67	73	69	76

المطلوب:

هل إن مقدار الزيادة الحاصلة في أوزان الحيوانات المختبرية، تعطي دليلا كافيا بأن متوسط زيادة الوزن لا يساوي (70)غم؟ إستخدم مستوى المعنوية ($\alpha = 0.01$).

الحل:

1- الفرضية الاحصائية المطلوب إختبارها، هي:

$H_0 : \mu = 70$

$H_1 : \mu \neq 70$

2- بما إن عدد المشاهدات (n) كبير، أي إن ($n > 15$) ، عليه نقوم باستخدام إحصاءة الاختبار (Z)، بعد حساب قيمة الاحصاءة (W)، على النحو الآتي:

X_i	$d_i = X_i - 70$	$\|d_i\|$	Rank $\|d_i\|$	إشارة الرتب Rank $\|d_i\|$
63	-7	7	14.5	-14.5
68	-2	2	2	-2
79	9	9	16	+16
65	-5	5	8.5	-8.5
64	-6	6	11.5	-11.5
63	-7	7	14.5	-11.5
65	-5	5	8.5	-8.5
64	-6	6	11.5	-11.5
76	6	6	11.5	+11.5
74	4	4	6	+6
66	-4	4	6	-6
66	-4	4	6	-6
67	-3	3	3.5	-3.5
73	3	3	3.5	+3.5
69	-1	1	1	-1
76	6	6	11.5	+11.5

$$\therefore W^+ = \sum R_i^+$$

$$= 48.5$$

$$W^- = \sum R_i^-$$

$$= 87.5$$

$$\therefore W = \text{Min}\,(W^+ , W^-)$$

$$= 48.5$$

3- نقوم بحساب الوسط الحسابي (μ_w) والانحراف المعياري (σ_w) للاحصاءة (W)، على النحو الآتي:

$$\mu_w = \frac{n(n+1)}{4}$$

$$= \frac{16(16+1)}{4}$$

$$= 68$$

$$\sigma_w = \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}$$

$$= \sqrt{\frac{16(16+1)(32+1)}{24}}$$

$$= 19.339$$

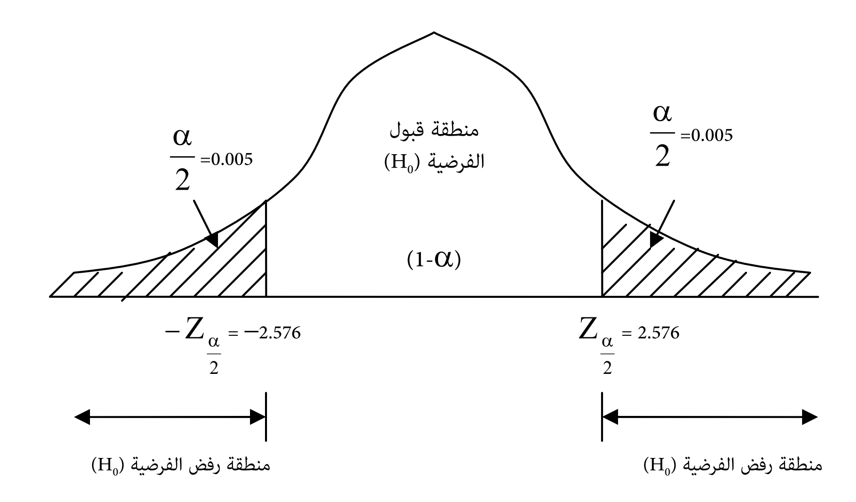
$$\therefore Z = \frac{W - \mu_w}{\sigma_w}$$

$$= \frac{48.5 - 68}{19.339}$$

$$= -1.008$$

4- من الجداول الخاصة بتوزيع (Z)، تبين إن قيمة ($Z_{\alpha/2}$) الجدولية، عند مستوى المعنوية ($\alpha = 0.01$)، بلغت (2.576).

5- تحديد مناطق رفض فرضية العدم (H_0)، كالآتي:



6- قاعدة القرار:

بما إن القيمة المطلقة لاحصاءة الاختبار (|Z|) البالغة (1.008)، تقع ضمن منطقة قبول فرضية العدم (H_0)، أي إن ($|Z| < 2.576$) ، عليه سيتم قبول فرضية العدم (H_0)، وهذا يعني إن ($\mu = 70$).

3-7: إختبار ولكوكسن لاشارة رتب الفرق المزدوج:

The Wilcoxon Matched – Paires Difference Signed Ranks Test

يستخدم إختبار ولكوكسن لاشارة رتب الفرق المزدوج، لاختبار الفرق بين متوسطي مجتمعين مرتبطين متماثلين ومتصلين دون تحديد نوع التوزيع لهما، ويشترط استخدام هذا الاختبار عندما تتراوح أزواج قيم المجتمعين بين ($7 \leq n \leq 20$) .

وتتلخص خطوات هذا الاختبار، بما يأتي:

1- تحديد الفرضية الاحصائية المطلوب إختبارها، على النحو الآتي:

$H_0: \mu_1 = \mu_2$

مقابل أحد اشكال الفرضية البديلة (H_1)، الآتية:

$H_1 : \mu_1 < \mu_2$

$H_1 : \mu_1 > \mu_2$

$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

2- تحديد مستوى المعنوية (α) .

3- حساب إحصاءة الاختبار [W^+ أو W^- أو W]، وفقا للخطوات الآتية:.

أ- ايجاد الفروق (d_i) بين قيم (X) وقيم (Y)، أي إن ($d_i = X_i - Y_i$).

ب- تحديد رتب القيم المطلقة للفروق ($|d_i|$)، أي إن ($\text{Rank } |d_i|$) .

ج- تثبيت إشارة الفروق (d_i)، أمام رتب القيم المطلقة للفروق ($\text{Rank } |d_i|$).

د- حساب إحصاءة الاختبار وفقا لشكل الفرضية البديلة (H_1)، على النحو الآتي:

$$W^+ = \sum R_i^+$$

$$W^- = \sum R_i^-$$

$$W = \text{Min } (W^+ , W^-)$$

4- استخراج قيم ولكوكسن الجدولية (W_u , W_L) من جداول ولكوكسن لاشارة الرتب (Wilcoxon Signed Rands Test) ، اعتمادا على عدد المشاهدات (n)، ومستوى المعنوية (α)، وفي ضوء شكل الفرضية البديلة (H_1).

5- تحديد مناطق رفض فرضية العدم (H_0)، وفقا لاحد اشكال الفرضية البديلة (H_1)، وبنفس الاسلوب المتبع باختبار ولكوكسن لاشارة الرتب.

6- قاعدة القرار، يتم اعتماد نفس الحالات الثلاثة الواردة في اتخاذ القرار المتعلق باختبار ولكوكسن لاشارة الرتب.

والجدول التالي، يلخص إجراءات إختبار ولكوكسن لاشارة رتب الفرق المزدوج:

منطقة رفض فرضية العدم (H_0)	إحصاءة الاختبار	فرضيتا الاختبار	
		أشكال الفرضية البديلة (H_1)	فرضية العدم(H_0)
$W^+ \leq W_L$	W^+	$\mu_1 < \mu_2$	$\mu_1 = \mu_2$
$W^- \geq Wu$	W^-	$\mu_1 > \mu_2$	
[$W \geq Wu$ أو $W \leq W_L$]	W	$\mu_1 \neq \mu_2$	

أما عندما يكون عدد المشاهدات (n) كبير، أي إن (n > 15)، ففي هذه الحالة نقوم باستخدام التوزيع الطبيعي المعياري، كتوزيع تقريبي لاجراء اختبار ولكوكسن لاشارة رتب الفرق المزدوج، وتأخذ إحصاءة الاختبار في ضوء الفرضية البديلة ($\mu_1 \neq \mu_2$)، الشكل الآتي:

$$Z = \frac{W - \mu_w}{\sigma_w}$$

حيث إن:

$$\mu_w = \frac{n(n+1)}{4}$$

$$\sigma_w = \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}$$

ولاتخاذ القرار الاحصائي حول رفض أو عدم رفض فرضية العدم (Ho)، يتم مقارنة القيمة المطلقة لاحصاءة الاختبار المحسوبة (|Z|) مع القيمة الجدولية ($Z_{tab.}$)، اعتمادا على مستوى المعنوية (α)، وشكل الفرضية البديلة (H_1). وعلى غرار ما تم إجراءه في الاختبار السابق.

مثال (4):

البيانات التالية، تمثل نتائج البرنامج الغذائي المستخدم لتخفيض وزن (10) نساء، وقد سُجلت النتائج قبل تنفيذ البرنامج، وبعد اسبوعين من تنفيذه.

قبل تنفيذ البرنامج (X)	60	59	62	69	64	63	57	64	68	59
بعد تنفيذ البرنامج (Y)	55	60	58	62	59	60	54	60	62	58

المطلوب: اختبر الفرضية الاحصائية الآتية:

$H_o : \mu_1 = \mu_2$

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

باستخدام اختبار (Wilcoxon Matched-Pairs) ، مستخدماً مستوى (α=0.05) .

الحل:

لاختبار الفرضية الاحصائية أعلاه، نتبع الخطوات الآتية:

1- **حساب إحصاءة الاختبار (W)، على النحو الآتي:**

X_i	Y_i	$d_i = X_i - Yi$	$\|d_i\|$	Rank $\|d_i\|$	إشارة الرتب Rank $\|d_i\|$
60	55	5	5	7.5	+7.5
59	60	-1	1	1.5	-1.5
62	58	4	4	5.5	+5.5
69	62	7	7	10	+10
64	59	5	5	7.5	+7.5
63	60	3	3	3.5	+3.5
57	54	3	3	3.5	+3.5
64	60	4	4	5.5	+5.5
68	62	6	6	9	+9
59	58	1	1	1.5	+1.5

$$\therefore W^+ = \sum R_i^+$$

$$= 53.5$$

$$W^- = \sum R_i^-$$

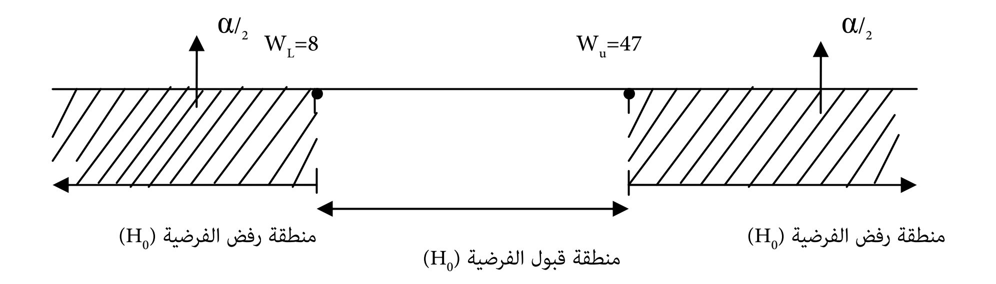
$$= 1.5$$

$$\therefore W = Min(W^+, W^-)$$

$$= 1.5$$

2- **من جداول ولكوكسن لاشارة الرتب،** إعتمادا على عدد المشاهدات ($n = 10$)، ومستوى المعنوية ($\alpha = 0.05$)، تبين إن القيم الحرجة لاختبار ولكوكسن (Wilcoxon) هي [$W_u = 47$, $W_L = 8$].

3- **تحديد مناطق رفض فرضية العدم (H_0)، كالآتي:**



4- قاعدة القرار:

بما إن إحصاءة الاختبار (W) البالغة (1.5)، تقع ضمن منطقة رفض فرضية العدم (H_0)، أي إن ($W<8$)، عليه سيتم رفض الفرضية (Ho)، وهذا يعني وجود فروق معنوية بين متوسطي نتائج البرنامج الغذائي لتخفيض الوزن قبل تنفيذ البرنامج وبعد تنفيذه، عند مستوى المعنوية ($\alpha = 0.05$).

4-7: إختبار ولكوكسن لمجموع الرتب: The Wilcoxon Ranks Sum Test

يستخدم إختبار ولكوكسن لمجموع الرتب، لاختبار الفرق بين متوسطي مجتمعين مستقلين لهما نفس الشكل دون تحديد نوع التوزيع، ويُشترط استخدامه عندما يكون عدد مشاهدات المجتمعين يتراوح بين [$3 \leq n_1, n_2 \leq 10$].

وتتلخص خطوات هذا الاختبار، بما يأتي:

1- تحديد الفرضية الاحصائية المطلوب إختبارها، على النحو الآتي:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

مقابل أحد أشكال الفرضية البديلة (H_1)، الآتية:

$$H_1 : \mu_1 < \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 > \mu_2$$

$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

2- تحديد مستوى المعنوية (α).

3- حساب إحصاءة الاختبار [U_1 أو U_2 أو U]، وفقا للخطوات الآتية:

(a) $W_1 = R_x$

$$\therefore U_1 = W_1 - \frac{n_1(n_1 + 1)}{2}$$

(b) $W_2 = R_y$

$$\therefore U_2 = W_2 - \frac{n_2(n_2 + 1)}{2}$$

(c) $\therefore U = Min (U_1, U_2).$

حيث إن:

R_x: تمثل مجموع رتب المجتمع الأول.

R_y: تمثل مجموع رتب المجتمع الثاني.

n_1: تمثل عدد مشاهدات عينة المجتمع الاول.

n_2: تمثل عدد مشاهدات عينة المجتمع الثاني.

U: تمثل أقل قيمة من بين القيمتين (U_2, U_1).

4- إستخراج قيم ولكوكسن الجدولية (Tu, T_L)، من جداول ولكوكسن لمجموع الرتب (Wilcoxon Ranks sum Tables)، إعتمادا على قيم كل من (n_1) و (n_2)، ومستوى المعنوية (α)، في ضوء الفرضية البديلة (H_1).

5- تحديد منطقة رفض فرضية العدم (H_0)، وفقا لاحد اشكال الفرضية البديلة (H_1)، وبنفس الاسلوب المعتمد في إختبار ولكوكسن لاشارة الرتب.

6- قاعدة القرار:

تنص القاعدة على رفض فرضية العدم (H_0)، في الحالات الآتية:

أ- إذا كانت قيمة إحصاءة الاختبار (U_1)، أقل من أو تساوي القيمة الحرجة للاختبار (T_L)، أي إن ($U_1 \leq T_L$)، وبعكسه يتم قبول فرضية العدم (H_0).

ب- إذا كانت قيمة إحصاءة الاختبار (U_2)، أكبر من أو تساوي القيمة الحرجة للاختبار (T_u)، أي إن ($U_2 \geq T_u$)، وبعكسه يتم قبول فرضية العدم (H_0).

جـ- إذا كانت قيمة إحصاءة الاختبار (U)، إما أقل من أو تساوي القيمة الحرجة للاختبار (T_L)، أو أكبر من أو تساوي القيمة الحرجة للاختبار (T_u)، ويتم قبول الفرضية (H_0)، عندما تقع قيمة إحصاءة الاختبار (U)، ضمن المجال $[T_L \leq U \leq T_u]$.

والجدول التالي: يلخص إجراءات إختبار ولكوكسن لمجموع الرتب:

منطقة رفض فرضية العدم (H_0)	إحصاءة الاختبار	فرضيتا الاختبار	
		أشكال الفرضية البديلة (H_1)	فرضية العدم(H_0)
$U_1 \leq T_L$	U_1	$\mu_1 < \mu_2$	$\mu_1 = \mu_2$
$U_2 \geq Tu$	U_2	$\mu_1 > \mu_2$	
[$U \leq T_L$ أو $U \geq T_u$]	U	$\mu_1 \neq \mu_2$	

أما عندما يكون عدد المشاهدات لاحد المجتمعين كبير، أي إن $(n_1 \text{ or } n_2 > 10)$، ففي هذه الحالة سيتم استخدام التوزيع الطبيعي المعياري، كتوزيع تقريبي لاجراء إختبار ولكوكسن لمجموع الرتب، وتأخذ إحصاءة الاختبار في ضوء الفرضية البديلة$(\mu_1 \neq \mu_2)$، الشكل الآتي:

$$Z = \frac{U - \mu_u}{\sigma_u}$$

حيث إن:

$$\mu_u = \frac{n_1 n_2}{2}$$

$$\sigma_u = \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}}$$

ولغرض إتخاذ القرار الاحصائي حول رفض أو عدم رفض فرضية العدم (H_0)، يتم مقارنة القيمة المطلقة لاحصاءة الاختبار المحسوبة $(|Z|)$، مع القيمة الجدولية $(Z_{tab.})$ التي يمكن الحصول عليها من جداول خاصة بالتوزيع الطبيعي المعياري، إعتمادا على مستوى المعنوية (α)، وشكل الفرضية البديلة (H_1)، وعلى غرار ما تم أجراءه سابقا.

مثال (5):

البيانات الواردة بالجدول التالي، تمثل توزيع طلبة كليتي الصيدلة والهندسة في احدى الجامعات الأردنية الاهلية، موزعين حسب مراحلهم الدراسية، للعام الدراسي (2003/2002).

المرحلة / الكلية	الاولى	الثانية	الثالثة	الرابعة
الصيدلة	80	85	90	93
الهندسة	95	100	88	82

المطلوب:

إستخدم إختبار (Wilcoxon Ranks Sum Test)، لاختبار الفرض القائل "توجد فروق بين متوسطي توزيع الطلبة على مستوى الكليتين"، مستخدما مستوى المعنوية ($\alpha = 0.05$).

الحل:

1- الفرضية الاحصائية المطلوب إختبارها، هي:

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

2- حساب إحصاءة الاختبار (U)، على النحو الآتي:

نقوم باعطاء رتب (Ranks) لمشاهدات العينتين مع بعضهما (Ordinal Data)، كالآتي:

رتب كلية الصيدلة Rank (X)	رتب كلية الهندسة Rank (Y)
1	7
3	8
5	4
6	2
Rx = 15	Ry = 21

$$\because \; W_1 = R_x = 15$$

$$\therefore U_1 = W_1 - \frac{n_1(n_1+1)}{2} = 15 - \frac{4(4+1)}{2} = 5$$

$$\because \; W_2 = R_y = 21$$

$$\therefore U_2 = W_2 - \frac{n_2(n_2+1)}{2}$$

$$= 21 - \frac{4(4+1)}{2}$$

$$= 11$$

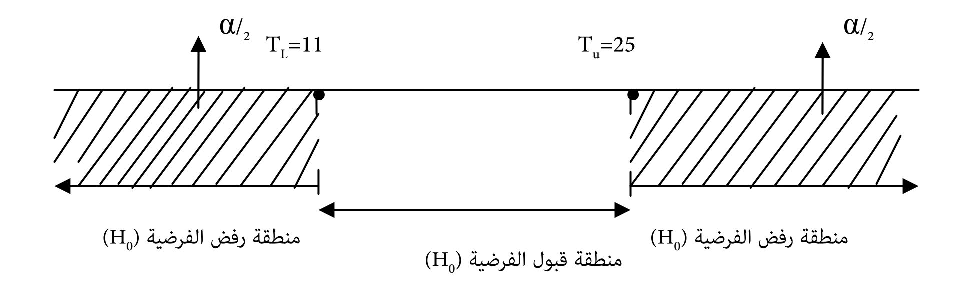
$$\therefore U = \text{Min}(U_1, U_2)$$

$$= \text{Min}(5, 11)$$

$$= 5$$

3- **من جداول ولكوكسن لمجموع الرتب،** اعتمادا على عدد مشاهدات العينتين ($n_1=n_2=4$)، ومستوى المعنوية ($\alpha = 0.05$)، تبين إن القيم الحرجة للاختبار هي [$T_u=25, T_L=11$].

4- **مناطق رفض فرضية العدم (H_0)، هي:**



5- **قاعدة القرار:**

بما إن إحصاءة الاختبار المحسوبة (U) البالغة (5)، تقع ضمن منطقة رفض فرضية العدم (H_0)، أي إن ($U < 11$)، عليه سيتم رفض فرضية العدم (H_0)، وهذا يعني وجود فروق معنوية بين متوسطي توزيع الطلبة على مستوى طلبة كليتي الصيدلة والهندسة، أي إن ($\mu_1 \neq \mu_2$)، عند مستوى المعنوية ($\alpha = 0.05$).

5-7: إختبار مان – وتني: The Mann – Whitney Test

اقترح كل من "مان و وتني" (Mann & Whitney) هذا الاختبار، لغرض إختبار الفرق بين متوسطي مجتمعين مستقلين لهما نفس الشكل دون تحديد نوع التوزيع، ويشبه هذا الاختبار إلى حد كبير إختبار ولكوكسن لمجموع الرتب، إلا إن الفرق الوحيد هو إن عدد المشاهدات للمجتمعين اكبر من عدد مشاهدات المجتمعين للاختبار السابق، إذ بلغت عدد المشاهدات المستخدمة بموجب هذا الاختبار بين (2 $\leq n, m \leq 20$)، ويسمى إختبار "مان – وتني" أحيانا باختبار "مان – وتني – ولكوكسن"(Mann – Whitney – Wilcoxon).

وتتلخص خطوات هذا الاختبار، بما يأتي:

1- تحديد الفرضية الاحصائية المطلوب إختبارها، على النحو الآتي:

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$

مقابل أحد أشكال الفرضية البديلة (H_1)، الآتية:

$H_1: \mu_1 < \mu_2$

$H_1: \mu_1 > \mu_2$

$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

2- تحديد مستوى المعنوية (α) .

3- حساب إحصاءة الاختبار (U_x أو U_y أو U)، وفقا للخطوات الآتية:

(a) $T_x = R_x$

$$\therefore U_x = nm + \frac{n(n+1)}{2} - T_x$$

(b) $T_y = R_y$

$$\therefore U_y = nm + \frac{m(m+1)}{2} - T_y$$

(c) $\therefore U = Min (U_x , U_y)$.

حيث إن:

R_x: تمثل مجموع رتب (Ranks) المجتمع الاول.

R_y: تمثل مجموع رتب (Ranks) المجتمع الثاني.

n: تمثل عدد مشاهدات المجتمع الأول.

m: تمثل عدد مشاهدات المجتمع الثاني.

U: تمثل أقل قيمة من بين القيمتين (U_y , U_x).

4- إستخراج قيمة مان – وتني الجدولة (U_0) من جداول "مان – وتني" (Mann – Whitney)، إعتمادا على قيم كل من (n) و (m)، عند مستوى المعنوية (α)، وفي ضوء الفرضية البديلة (H_1).

5- تحديد منطقة رفض فرضية العدم (H_0)، وفقا لاحد أشكال الفرضية البديلة (H_1)، إذ تتحدد منطقة الرفض بقيمة حرجة واحدة هي (U_0)، كما موضح بالجدول التالي.

6- قاعدة القرار، تنص على رفض فرضية العدم (H_0)، عندما تكون قيم إحصاءة الاختبار [U, U_y, U_x] في ضوء الفرضية البديلة (H_1)، عندما تكون إحدى الصيغ الثلاث الواردة في الجدول التالي، وبعكسه سيتم قبول فرضية العدم (H_0).

والجدول التالي، يلخص إجراءات إختبار مان – وتني:

فرضيتا الاختبار		إحصاءة الاختبار	منطقة رفض فرضية العدم (H_0)
فرضية العدم(H_0)	أشكال الفرضية البديلة (H_1)		
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$	U_x	$U_x \leq U_0$
	$\mu_1 > \mu_2$	U_y	$U_y \geq U_0$
	$\mu_1 \neq \mu_2$	U	$U \leq U_0$

أما عندما يكون عدد المشاهدات لاحد المجتمعين كبير، أي إن (n or $m > 20$)، ففي هذه الحالة سنقوم باستخدام التوزيع الطبيعي المعياري، كتوزيع تقريبي لاجراء إختبار مان – وتني، وتأخذ إحصاءة الاختبار في ضوء الفرضية البديلة ($\mu_1 \neq \mu_2$)، الشكل الاتي:

$$Z = \frac{U - \mu_u}{\sigma_u}$$

حيث إن :

$$\mu_u = \frac{nm}{2}$$

$$\sigma_u = \sqrt{\frac{nm(n+m+1)}{12}}$$

ولغرض إتخاذ القرار الاحصائي حول رفض أو عدم رفض فرضية العدم (H_0)، يتم مقارنة القيمة المطلقة لاحصاءة الاختبار المحسوبة (|Z|)، مع القيمة الجدولية ($Z_{tab.}$) التي يمكن الحصول عليها من جداول خاصة بالتوزيع الطبيعي المعياري، اعتمادا على مستوى المعنوية (α)، وشكل الفرضية البديلة (H_1)، وعلى غرار ما تم اجراءه في الاختبارات السابقة.

مثال (6):

البيانات الموضحة بالجدول التالي، تمثل توزيع الجهاز الاكاديمي في جامعتي اليرموك وعمان الاهلية، موزعين حسب مؤهلاتهم العلمية، للعام الدراسي (1992/1991).

المؤهل العلمي / الجامعة	دكتوراه	ماجستير	دبلوم عالي	بكالوريوس
اليرموك	390	95	3	35
عمان الاهلية	80	12	2	1

المطلوب:

إستخدم إختبار (Mann-Whitney Test)، لاختبار الفرض القائل "توجد فروق بين متوسطي توزيع الجهاز الاكاديمي على مستوى الجامعتين"، مستخدما مستوى المعنوية ($\alpha = 0.05$).

الحل:

1- الفرضية الاحصائية المطلوب إختبارها، هي:

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

3- حساب إحصاءة الاختبار (U)، على النحو الآتي:

نقوم باعطاء رتب (Ranks) لمشاهدات العينتين مع بعضهما (Ordinal Data)، كالآتي:

رتب جامعة اليرموك Rank (X)	رتب جامعة عمان الاهلية Rank (Y)
6	8
4	7
2	3
1	5
Rx = 13	Ry = 23

$\because \; T_x = R_x$

$= 13$

$$\therefore U_x = nm + \frac{n(n+1)}{2} - T_x$$

$$= 4(4) + \frac{4(4+1)}{2} - 13$$

$$= 13$$

$\because \; T_y = R_y$

$=23$

$$\therefore U_y = nm + \frac{m(m+1)}{2} - T_y$$

$$= 4(4) + \frac{4(4+1)}{2} - 23$$

$$= 3$$

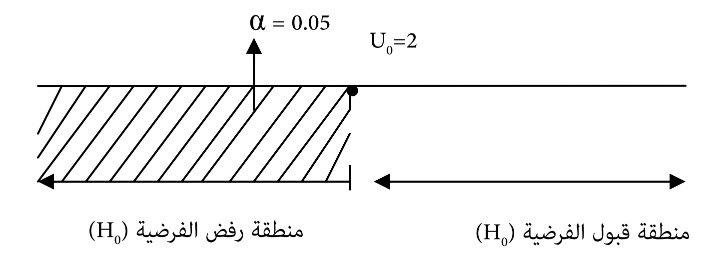
$$\therefore U = Min\ (U_x, U_y)$$

$$= Min\ (13, 3)$$

$$= 3$$

3- **من جداول (Mann – Whitney)**، اعتماداً على عدد مشاهدات العينتين($n = m = 4$)، ومستوى المعنوية ($\alpha = 0.05$)، تبين إن قيمة مان – وتني الجدولية (U_0) بلغت (2).

4- **منطقة رفض فرضية العدم (H_0)، هي:**



5- **قاعدة القرار:**

بما إن احصاءة مان – وتني المحسوبة (U) البالغة (3)، تقع ضمن منطقة قبول فرضية العدم (H_0)، أي إن ($U > 2$)، عليه سيتم قبول فرضية العدم (H_0)، وهذا يعني عدم وجود فروق بين متوسطي توزيع الجهاز الاكاديمي على مستوى الجامعتين، أي إن ($\mu_1 = \mu_2$)، عند مستوى المعنوية ($\alpha = 0.05$).

6-7: إختبار كروسكال – والز: The Kruskal – Wallis Test

إن أول من اقترح هذا الاختبار هو كل من "كروسكال ووالز" (Kruskal & Wallis) عام (1952)، ويُعد إختبار كروسكال – والز إسلوب إحصائي بديل عن اسلوب تحليل التباين باتجاه واحد (One-Way ANOVA) الذي تم دراسته في الفصل السادس المتعلق بدراسة الفروق بين متوسطات المجتمعات التي تخضع للتوزيع الطبيعي، ويستخدم إختبار كروسكال – والز عندما يكون عدد المجتمعات (k) أكبر من (2)، أي إن (k>2) ولها نفس الشكل دون التطرق إلى نوع التوزيع لهذه المجتمعات، ويهدف هذا الاختبار إلى دراسة الفروق بين متوسطات مجتمعات متماثلة ومستقلة بعضها عن بعض.

ويسمى اختبار كروسكال – والز احيانا بأسلوب تحليل التباين الرتبي باتجاه واحد (Kruskal – Wallis One-Way ANOVA by Ranks).

وتتلخص خطوات هذا الاختبار، بما يأتي:

1- تحديد الفرضية الاحصائية المطلوب إختبارها، على النحو الآتي:

$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \ldots\ldots = \mu_k$

H_1: At least one average is different.

1- تحديد مستوى المعنوية (α) .

2- حساب إحصاءة الاختبار (H)، وفقا للصيغة الآتية:

$$H = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{i}^{k} \frac{R_i^2}{n_i} - 3(n+1)$$

إن إحصاءة الاختبار (H) اعلاه، تخضع إلى توزيع مربع كاي (χ^2) بدرجات حرية (k-1)، ومستوى المعنوية (α)، أي إن:

$$H \sim \chi^2_{(k-1,\alpha)}$$

حيث إن:

K : تمثل عدد المجموعات (المجتمعات) المدروسة.

n_i : تمثل عدد مشاهدات المجموعة رقم (i) .

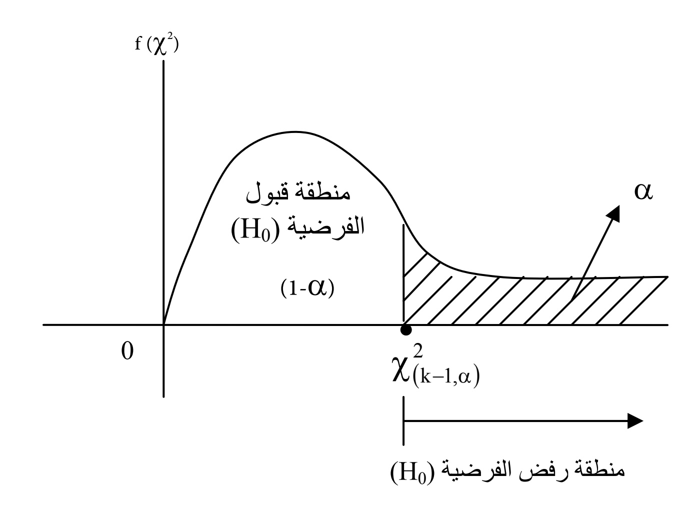
n : تمثل مجموع مشاهدات المجموعات، أي إن [$n = n_1 + n_2 + ... + n_k$].

R_i : تمثل مجموع رتب (Ranks) المجموعة رقم (i) .

$\chi^2_{(k-1,\alpha)}$: تمثل قيمة مربع كاي (χ^2) الجدولية، بدرجة حرية (k-1)، ومستوى المعنوية (α).

4- استخراج قيمة مربع كاي (χ^2) الجدولية، من جداول توزيع مربع كاي (χ^2)، اعتمادا على درجات الحرية (df = k-1)، ومستوى المعنوية (α).

5- تحديد منطقة رفض فرضية العدم (H_0)، على النحو الآتي:



6- قاعدة القرار : تنص على رفض فرضية العدم (H_0)، عندما تكون قيمة (H) المحسوبة أكبر من او تساوي قيمة مربع كاي $\left(\chi^2_\alpha\right)$ الجدولية، أي إن ($H \geq \chi^2_\alpha$)، وهذا يعني وجود فروق معنوية بين متوسطات المجموعات، على مستوى المعنوية (α)، وبعكسه سيتم قبول فرضية العدم (H_0).

مثال (7):

اختيرت أربعة أنواع من السكائر عشوائيا، لاختبار كمية القطران التي تحتويها، وقد سجلت معدلات كمية القطران (بالملغم) في (16) سيكارة يراد اختبارها، كما هو موضح بالجدول الآتي:

النوع (A)	النوع (B)	النوع (C)	النوع (D)
16	11	21	14
19	15	9	17
18	13	12	13
20	14	10	15

المطلوب:

إستخدم إختبار (Kruskal – Wallis Test)، لاختبار الفرض القائل "توجد فروق معنوية بين معدلات كمية القطران في أنواع السكائر الأربعة"، مستخدما مستوى المعنوية ($\alpha = 0.05$).

الحل:

1- الفرضية الاحصائية المطلوب إختبارها، هي:

$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$.

H_1: At Least one average is different.

2- حساب إحصاءة الاختبار (H)، على النحو الآتي:

نقوم بإعطاء رتب (Ranks) لمشاهدات عينات المجتمعات الاربعة مع بعضها (Ordinal Data)، كالآتي:

Rank (A)	Rank (B)	Rank (C)	Rank (D)
7.5	16	3	11
12	1	9.5	14
5.5	4	5.5	13
9.5	2	7.5	15
R_1=34.5	R_2=23	R_3=25.5	R_4=53

$$\because\ n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$$
$$= 16$$

$$\therefore H = \frac{12}{n(n+1)}\sum_{i}^{k}\frac{R_i^2}{n_i} - 3(n+1)$$

$$= \frac{12}{16(16+1)}\left[\frac{(34.5)^2}{4} + \frac{(23)^2}{4} + \frac{(25.5)^2}{4} + \frac{(53)^2}{4}\right] - 3(16+1)$$

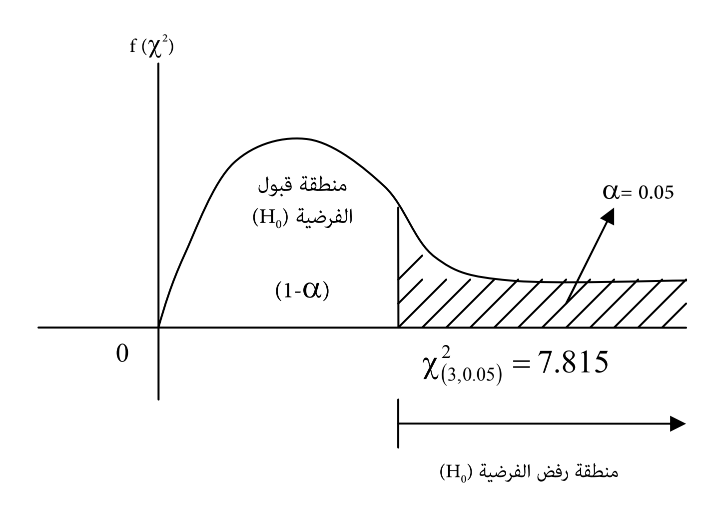
$$= \frac{12}{272}(1294.625) - 51$$

$$= 57.116 - 51$$

$$= 6.116$$

3- **من جداول توزيع مربع كاي** (χ^2)، بدرجات حرية (k-1 = 3)، ومستوى المعنوية (α = 0.05)، تبين إن قيمة مربع كاي الجدولية $\left(\chi_{\alpha}^2\right)$ بلغت (7.815).

4- منطقة رفض فرضية العدم (H_0)، هي:



5- قاعدة القرار:

بما إن قيمة إحصاءة الاختبار المحسوبة (H) البالغة (6.116)، تقع ضمن منطقة قبول فرضية العدم (H_0)، أي إن [$H < 7.815$]، عليه سيتم قبول فرضية العدم (Ho)، وهذا يعني عدم وجود فروق بين معدلات كمية القطران في أنواع السكائر الأربعة، أي إن [$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$]، عند مستوى المعنوية ($\alpha = 0.05$).

7-7: إختبار فريدمان: **The Friedman Test**

يعود الفضل الاول للعالم "فريدمان" (Friedman) في إقتراح هذا الاختبار، ويُعد إختبار فريدمان إسلوب إحصائي بديل عن اسلوب تحليل التباين باتجاهين (Two-way ANOVA) الذي تم دراسته في الفصل السادس المتعلق بدراسة الفروق بين متوسطات المجتمعات التي تخضع للتوزيع الطبيعي، ويستخدم هذا الاختبار بدراسة مجتمعات متماثلة ومستقلة بعضها عن بعض، ولكن لها نفس الشكل دون التطرق إلى نوع التوزيع، إذ يتم دراسة مشاهدات المجتمعات باعتبارها كمعالجات (Treatements)، بعد توزيعها على قطاعات (Blocks).

ويسمى إختبار فريدمان احيانا باسلوب تحليل التباين الرتبي باتجاهين (Friedman Two-Way ANOVA by Ranks).

وتتلخص خطوات هذا الاختبار، بما يأتي:

1- تحديد الفرضية الاحصائية المطلوب إختبارها، على النحو الآتي:

$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \ldots\ldots\ldots = \mu_k$.

H_1: At Least one average is different.

2- تحديد مستوى المعنوية (α).

3- حساب إحصاءة الاختبار $\left(\chi_T^2\right)$، وفقا للصيغة الآتية:

$$\chi_T^2 = \frac{12}{nk(k+1)}\sum_j^k R_j^2 - 3n(k+1)$$

إن إحصاءة الاختبار $\left(\chi_T^2\right)$ أعلاه، تخضع إلى توزيع مربع كاي (χ^2)، بدرجات حرية (k-1)، ومستوى المعنوية (α)، أي إن:

$$\chi_T^2 \sim \chi_{(k-1,\alpha)}^2$$

حيث إن:

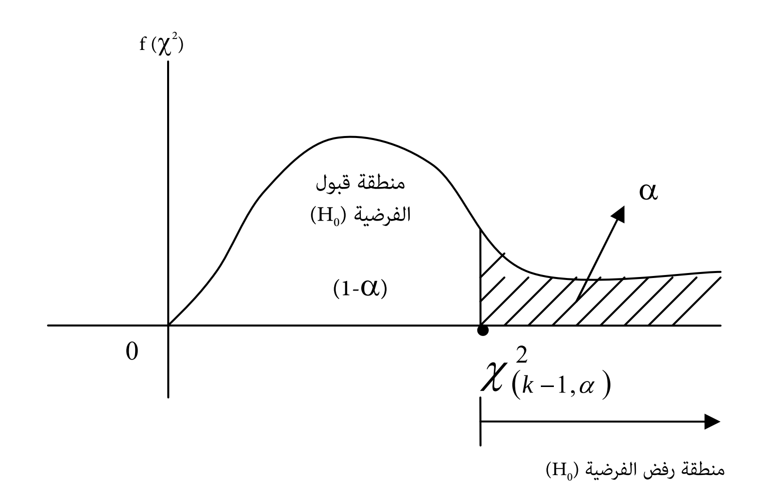
k : تمثل عدد المعالجات (الاعمدة).

n : تمثل عدد القطاعات (الصفوف).

R_j : تمثل مجموع رتب المعالجة رقم (j).

3- إستخراج قيمة مربع كاي (χ^2)، من جداول توزيع مربع كاي (χ^2)، اعتمادا على درجات الحرية ($df = k - 1$)، ومستوى المعنوية (α).

4- تحديد منطقة رفض فرضية العدم (H_0)، على النحو الآتي:



6- قاعدة القرار، تنص على رفض فرضية العدم (H_0)، عندما تكون قيمة إحصاءة الاختبار $\left(\chi^2_T\right)$ المحسوبة، اكبر من أو تساوي قيمة مربع كاي الجدولية $\left(\chi^2_\alpha\right)$، أي إن $\left(\chi^2_T \geq \chi^2_\alpha\right)$، وهذا يعني وجود فروق معنوية بين متوسطات المعالجات، عند مستوى المعنوية (α)، وبعكسه سيتم قبول الفرضية (H_0).

مثال (8):

البيانات التالية، تمثل نسب استجابة (10) عشرة حيوانات تجريبية، بعد إعطائها ثلاث مستويات (جرع) من مادة الاتروبين (Atropine) لمعالجة اللعاب السائل، كما موضح بالجدول الآتي:

رقم الحيوان (القطاعات)	جرع الاتروبين (المعالجات)		
	A	B	C
1	100	90	100
2	34	60	81
3	39	73	79
4	35	88	95
5	42	30	80
6	45	71	98
7	96	100	100
8	35	61	78
9	97	85	93
10	95	95	30

المطلوب:

استخدم إختبار (Friedman Test)، لاختبار الفرض القائل "توجد فروق معنوية بين متوسطات الجرع الثلاثة لمادة الاتروبين (المعالجات)"، مستخدما مستوى المعنوية ($\alpha = 0.05$).

الحل:

1- **الفرضية الاحصائية المطلوب إختبارها، هي:**

$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

H_1: At Least one average is different.

-2 حساب إحصاءة الاختبار $\left(\chi_T^2\right)$ ، على النحو الآتي:

نقوم باعطاء رتب (Ranks) للمشاهدات الخاصة بالمعالجات، ولكل قطاع (Block) من القطاعات العشرة كل على إنفراد، كالآتي:

القطاعات Blocks	Rank (A)	Rank (B)	Rank (C)
1	2.5	1	2.5
2	1	2	3
3	1	2	3
4	1	2	3
5	2	1	3
6	1	2	3
7	1	2.5	2.5
8	1	2	3
9	3	1	2
10	2.5	2.5	1
R_j	16	18	26

$$\because \chi_T^2 = \frac{12}{nk(k+1)}\sum_{j}^{k} R_j^2 - 3n(k+1)$$

$$\therefore \chi_T^2 = \frac{12}{10(3)(3+1)}\left[(16)^2 + (18)^2 + (26)^2\right] - 3(10)(3+1)$$

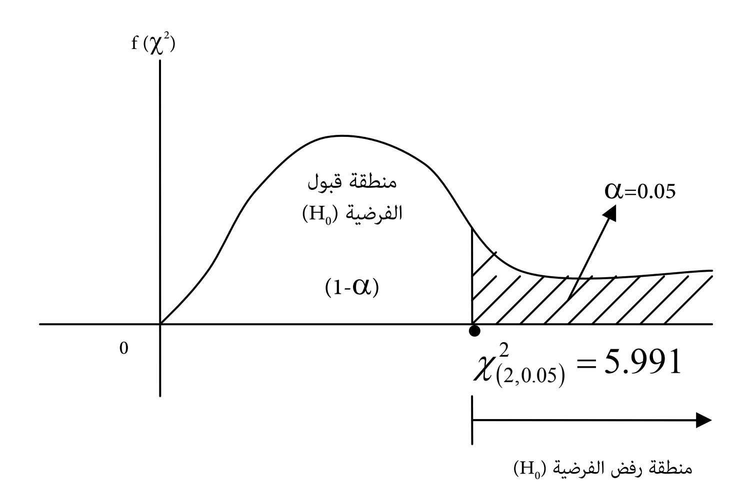
$$= \frac{12}{120}(1256) - 120$$

$$= 125.6 - 120$$

$$= 5.6$$

3- **من جداول توزيع مربع كاي** (χ^2)، بدرجة حرية (k-1 = 2)، ومستوى المعنوية ($\alpha = 0.05$)، تبين إن قيمة مربع كاي الجدولية $\left(\chi^2_\alpha\right)$ بلغت (5.991).

4- **منطقة رفض فرضية العدم (H_0)، هي:**



5- قاعدة القرار:

بما إن قيمة إحصاءة الاختبار المحسوبة $\left(\chi^2_T\right)$ البالغة (5.6)، تقع ضمن منطقة قبول فرضية العدم (H_0)، أي إن $\left(\chi^2_T < 5.991\right)$، عليه سيتم قبول فرضية العدم (H_0)، وهذا يعني عدم وجود فروق بين متوسطات مستويات جرع مادة الاتروبين (المعالجات)، أي إن ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$)، عند مستوى المعنوية ($\alpha = 0.05$).

8-7: إختبار معامل إرتباط الرتب لسبيرمان:

The Spearman's Ranks Correlation Coefficient Test.

يُعد إختيار معامل إرتباط الرتب لسبيرمان من الاختبارات اللامعلمية الشائعة في إختبار العلاقة بين متغيرين وصفيين، أو احدهما وصفي والآخر كمي، أو كليهما كميين، ويستخدم هذا الاختبار عندما يكون عدد أزواج القيم (n) يتراوح بين ($5 \leq n \leq 30$).

وتتلخص خطوات هذا الاختبار، بما يأتي:

1- تحديد الفرضية الاحصائية المطلوب إختبارها، على النحو الآتي:

$H_0: \rho_s = 0$

مقابل أحد اشكال الفرضية البديلة (H_1)، الآتية:

$H_1: \rho_s < 0$

$H_1: \rho_s > 0$

$H_1: \rho_s \neq 0$

2- تحديد مستوى المعنوية (α).

3- حساب إحصاءة الاختبار (r_s)، وفقا للصيغة الآتية:

$$r_s = 1 - \frac{6\sum_{i}^{n} d_i^2}{n(n^2 - 1)}$$

حيث إن:

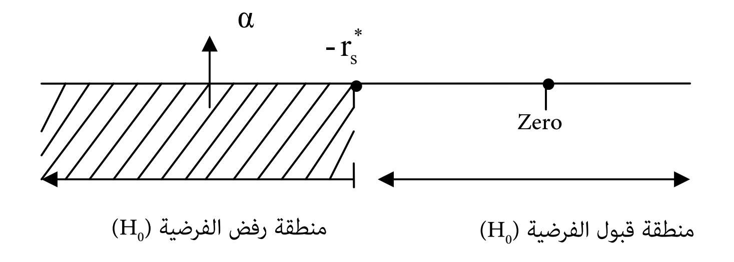
d_i: تمثل الفرق بين رتب المتغيرين (X) و (Y)، أي إن [$d_i = R_x - R_y$].

n : تمثل عدد أزواج قيم المتغيرين (X) و (Y).

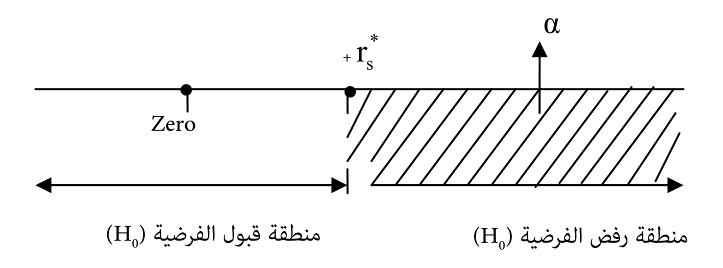
4- إستخراج القيمة الحرجة (r_s^*) لمعامل إرتباط الرتب لسبيرمان، من الجداول الخاصة باختبار سبيرمان الرتبي، إعتمادا على عدد أزواج قيم المتغيرين (n)، ومستوى المعنوية المطلوب (α)، وفي ضوء شكل الفرضية البديلة (H_1).

5- تحديد منطقة رفض فرضية العدم (H_0)، وفقا لشكل الفرضية البديلة (H_1)، كما موضحة على النحو الآتي:

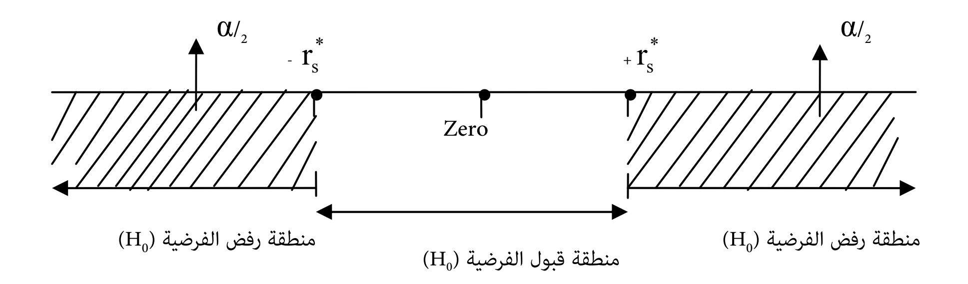
(a) $H_1: \rho_s < 0$



(b) $H_1: \rho_s > 0$



(c) $H_1: \rho_s \neq 0$



6- قاعدة القرار:

تنص القاعدة على رفض فرضية العدم (H_0)، في الحالات الآتية:

أ- إذا كانت قيمة إحصاءة الاختبار (r_s)، أقل من أو تساوي القيمة الحرجة (r_s^* -) لاختبار سبيرمان الرتبي، أي إن ($r_s \leq - r_s^*$)، وبعكسه يتم قبول الفرضية (H_0).

ب- إذا كانت قيمة إحصاءة الاختبار (r_s)، أكبر من أو تساوي القيمة الحرجة ($+ r_s^*$) لاختبار سبيرمان الرتبي، أي إن ($r_s \geq + r_s^*$)، وبعكسه يتم قبول الفرضية (H_0).

ج- إذا كانت إحصاءة الاختبار (r_s)، إما أقل من أو تساوي القيمة الحرجة للاختبار ($- r_s^*$)، أو أكبر من أو تساوي القيمة الحرجة للاختبار ($+ r_s^*$)، ويتم قبول الفرضية (H_0)، عندما تقع قيمة إحصاءة الاختبار (r_s)، ضمن المجال الآتي

$[- r_s^* < r_s < + r_s^*]$.

والجدول التالي، يلخص إجراءات إختبار سبيرمان الرتبي:

منطقة رفض فرضية العدم (H_0)	إحصاءة الاختبار	فرضيتا الاختبار	
		أشكال الفرضية (H_1) البديلة	**فرضية العدم(H_0)**
$r_s \leq - r_s^*$	r_s	$\rho_s < 0$	$\rho_s = 0$
$r_s \geq + r_s^*$	r_s	$\rho_s > 0$	
[$r_s \geq + r_s^*$ أو $r_s \leq - r_s^*$]	r_s	$\rho_s \neq 0$	

أما عندما يكون عدد أزواج قيم المتغيرين (X) و (Y) كبير، أي إن ($n > 30$)، ففي هذه الحالة نقوم باستخدام التوزيع الطبيعي المعياري، كتوزيع تقريبي لاجراء إختبار معامل إرتباط الرتب لسبيرمان، وتأخذ إحصاءة الاختبار في ضوء الفرضية البديلة ($\rho_s \neq 0$)، الشكل الآتي:

$$Z = \frac{r_s - E(r_s)}{\sigma_{(r_s)}}$$

حيث إن:

$$E(r_s) = Zero.$$

$$\sigma_{(r_s)} = \sqrt{\frac{1}{n-1}}$$

عليه تكون إحصاءة الاختبار (Z)، بصيغتها النهائية، على النحو الآتي:

$$Z = r_s * \sqrt{n-1}$$

ولغرض إتخاذ القرار الاحصائي حول رفض أو عدم رفض فرضية العدم (H_0)، يتم مقارنة القيمة المطلقة لاحصاءة الاختبار المحسوبة (|Z|) مع القيمة الجدولية ($Z_{tab.}$)، اعتماداً على مستوى المعنوية المطلوب (α)، وشكل الفرضية البديلة (H_1).

مثال (9)

البيانات التالية، تمثل اوزان (10) عشرة أطفال حديثي الولادة، واطوالهم عند الولادة.

وزن الطفل (كغم)	**2.8**	**2.2**	**4.4**	**5.6**	**3.2**	**4.2**	**2.3**	**4.3**	**3.7**	**5.3**
طول الطفل (سم)	**39.5**	**36.3**	**42.2**	**46.5**	**37.2**	**37.7**	**38.3**	**40.3**	**38.7**	**48.2**

المطلوب:

إستخدم إختبار معامل إرتباط الرتب لسبيرمان، لإختبار الفرض القائل "توجد علاقة بين وزن الطفل (X) وطوله (Y)"، مستخدما مستوى المعنوية ($\alpha = 0.01$).

الحل:

1- الفرضية الاحصائية المطلوب إختبارها، هي:

$$H_0: \rho_s = 0$$

$$H_1: \rho_s \neq 0$$

2- **حساب إحصاءة الاختبار (r_s)، على النحو الآتي:**

نقوم بإعطاء رتب (Ranks) للمتغيرين (X) و (Y) كل على انفراد، كالآتي:

وزن الطفل X	طول الطفل Y	رتب (X) Rank (X)	رتب (Y) Rank (Y)	الفروق $d_i=R_x-R_y$	d_i^2
2.8	39.5	3	6	-3	9
2.2	36.3	1	1	0	0
4.4	42.2	8	8	0	0
5.6	46.5	10	9	1	1
3.2	37.2	4	2	2	4
4.2	37.7	6	3	3	9
2.3	38.3	2	4	-2	4
4.3	40.3	7	7	0	0
3.7	38.7	5	5	0	0
5.3	48.2	9	10	-1	1
-	-	-	-	Zero	28

$\sum_{i}^{10} d_i^2$

$$\therefore r_s = 1 - \frac{6\sum_{i}^{10} d_i^2}{n(n^2-1)}$$

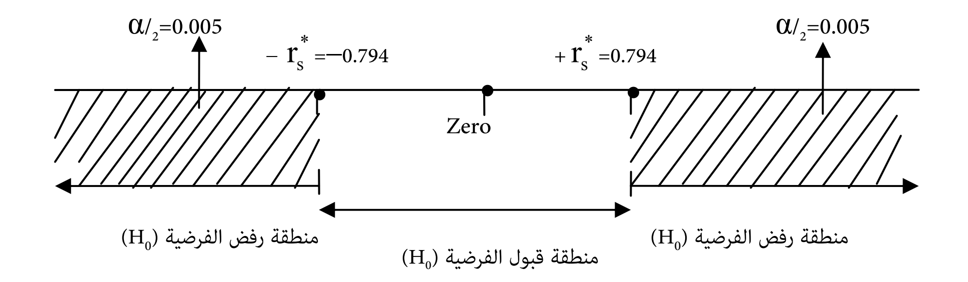
$$= 1 - \frac{6(28)}{10(100-1)}$$

$$= 1 - 0.17$$

$$= +0.83$$

3- **من جداول معامل إرتباط الرتب لسبيرمان،** إعتماداً على عدد أزواج القيم ($n = 10$)، ومستوى المعنوية ($\alpha = 0.01$)، تبين إن القيمة الحرجة (r_s^*) لاختبار سبيرمان الرتبي بلغت (0.794).

4- **مناطق رفض فرضية العدم (H_0)، هي:**



5- **قاعدة القرار:**

بما إن قيمة إحصاءة الاختبار (r_s) المحسوبة والبالغة (0.83)، تقع ضمن منطقة رفض فرضية العدم (H_0)، أي إن ($r_s > 0.794$)، عليه سيتم رفض فرضية العدم (H_0)، وهذا يعني وجود علاقة معنوية بين وزن الطفل (X) وطوله (Y)، على مستوى المعنوية ($\alpha = 0.01$).

7- 9 : إختبار مربع كاي (χ^2) : The Chi-square Test

يعد اختبار مربع كاي (χ^2) من الاختبارات اللامعلمية المهمة جدا نظرا لتعدد استخداماته، فهو يستخدم في إختبار التجانس، واختبار حُسن المطابقة، واختبار الاستقلالية الذي ينصب على دراسة العلاقة بين متغيرين، وسيقتصر التركيز في هذا الجزء على استخدام إختبار مربع كاي (χ^2) في اختبار العلاقة بين متغيرين، ويشترط في هذا الاختبار أن تكون البيانات من النوع الثنائي (Binary Data)، ويطلق على هذا النوع من البيانات احيانا بجداول التوافق (Contingency Tables).

وتتلخص خطوات هذا الاختبار، بما يأتي:

1- تحديد الفرضية الاحصائية المطلوب إختبارها، على النحو الآتي:

H_0 : X and Y are independent.

H_1: X and Y are not independent.

2- تحديد مستوى المعنوية (α) .

3- حساب إحصاءة الاختبار (χ^2)، كالآتي:

$$\chi^2 = \sum_{i}^{m} \sum_{j}^{n} \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$$

حيث إن:

O_{ij} : تمثل التكرار المشاهد (Observed Frequency) في الصف (i) والعمود (j).

E_{ij} : تمثل التكرار المشاهد (Expected Frequency) في الصف (i) والعمود (j).

وللاغراض التطبيقية يتم ايجاد التكرارات المتوقعة (E_{ij})، وفقا للصيغة الآتية:

$$E_{ij} = \frac{R_{i.} * C_{.j}}{T..}$$

حيث إن:

$R_{i.}$: مجموع التكرارات المشاهدة (O_{ij}) في الصف رقم (i).

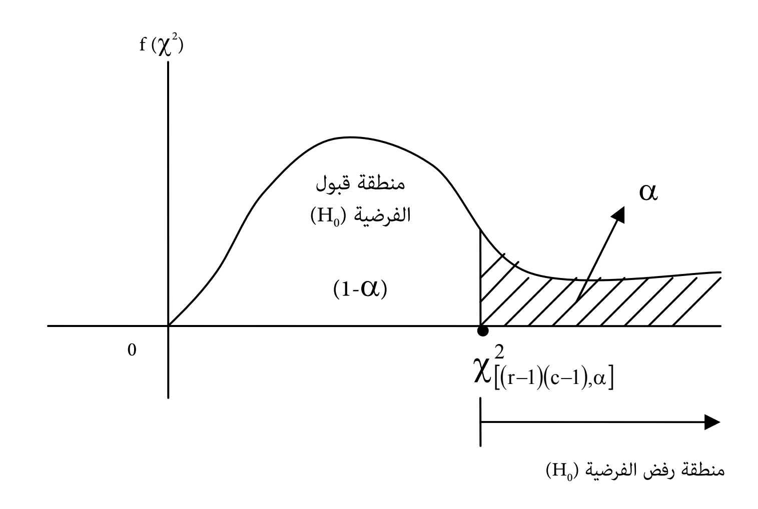
$C_{.j}$: مجموع التكرارات المشاهدة (O_{ij}) في العمود رقم (j).

T.. : مجموع التكرارات المشاهدة (O_{ij}) في جدول التوافق.

4- إستخراج قيمة مربع كاي الجدولية (χ^2_α)، من جداول توزيع مربع كاي (χ^2)، بدرجة حرية [df = (r-1) (c-1)] ، ومستوى المعنوية المطلوب (α)، حيث إن:

[r : تمثل عدد الصفوف، c : تمثل عدد الاعمدة].

5- تحديد منطقة رفض فرضية العدم (H_0)، على النحو الآتي:



6- قاعدة القرار : تنص على رفض فرضية العدم (H_0)، عندما تكون قيمة مربع كاي المحسوبة (χ^2)، أكبر من أو تساوي قيمة مربع كاي الجدولية (χ^2_α)، أي إن ($\chi^2 \geq \chi^2_\alpha$)، وهذا يعني وجود علاقة معنوية بين المتغيرين، بمعنى آخر إن المتغيرين غير مستقلين (مرتبطين)، على مستوى المعنوية (α).

مثال (10):

البيانات الواردة بالجدول المزدوج التالي، تمثل أوزان (1000) طالب وأعمارهم من طلاب جامعة فيلادلفيا، تم إختيارهم عشوائيا.

Weights الوزن / Ages العمر	50-60	60-70	70 and more	Total
18-20	128	108	164	400
20-22	100	132	168	400
22 and more	72	60	68	200
Total	300	300	400	1000

المطلوب:

إستخدم إختبار مربع كاي (χ^2)، لاختبار الفرض القائل "إن اوزان الطلاب مستقلة عن أعمارهم"، مستخدما مستوى المعنوية ($\alpha = 0.05$).

الحل:

1- **الفرضية الاحصائية المطلوب إختبارها، هي:**

H_0 : The Weights (X) and Ages (Y) are independent.

H_1 : The Weights (X) and Ages (Y) are not independent.

2- **حساب إحصاءة الاختبار (χ^2)، على النحو الآتي:**

نقوم اولا بايجاد التكرارات المتوقعة (E_{ij}) ، وفقا للصيغة الآتية:

$$E_{ij} = \frac{R_{i.} * C_{.j}}{T..}$$

فعلى سبيل المثال التكرار المتوقع (E_{11})، يُحسب كالاتي:

$$E_{11} = \frac{R_{1.} * C_{.1}}{T_{..}}$$

$$= \frac{400(300)}{1000}$$

$$= 120$$

وبنفس الاسلوب يمكن الحصول على بقية التكرارات المتوقعة (E_{ij})، كما موضحة بالجدول الآتي:

A_i \ W_j	50-60	60-70	70 and more	Total
18-20	128 (120)	108 (120)	164 (160)	400
20-22	100 (120)	132 (120)	168 (160)	400
22 and more	72 (60)	60 (60)	68 (80)	200
Total	300	300	400	1000

(*) القيم بين الاقواس تمثل التكرارات المتوقعة (E_{ij}).

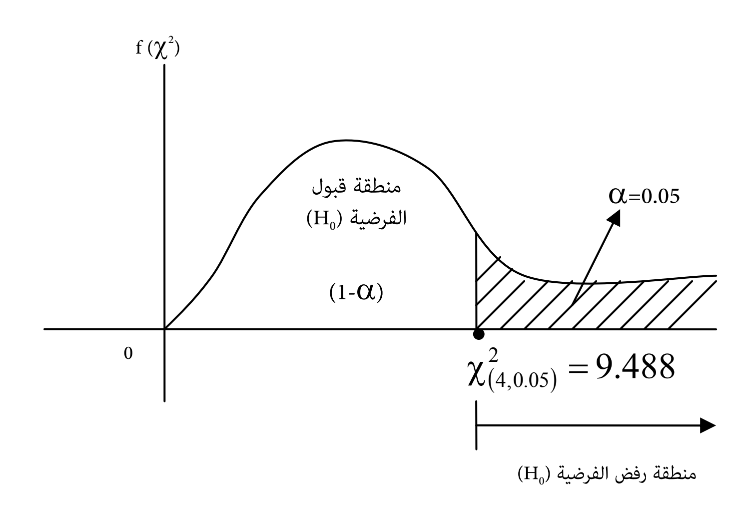
$$\therefore \chi^2 = \sum_{i}^{3} \sum_{j}^{3} \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$$

$$= \frac{(128-120)^2}{120} + \frac{(108-120)^2}{120} + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + \frac{(68-80)^2}{80}$$

$$= 10.967$$

3- **من جداول توزيع مربع كاي (χ^2)**، بدرجة حرية [(r -1) (c-1) = 4]، ومستوى المعنوية ($\alpha = 0.05$)، تبين إن قيمة مربع كاي الجدولية (χ^2_α) بلغت (9.488).

4- **منطقة رفض فرضية العدم (H0)، هي:**



5- قاعدة القرار:

بما إن قيمة مربع كاي المحسوبة (χ^2) البالغة (10.967)، تقع ضمن منطقة رفض فرضية العدم (H_0)، أي إن ($\chi^2 > 9.488$)، عليه سيتم رفض فرضية العدم (H_0)، وهذا يعني وجود علاقة معنوية بين اوزان الطلبة واعمارهم، بمعنى آخر إن كل من أوزان الطلاب وأعمارهم غير مستقلين (مرتبطين)، عند مستوى المعنوية ($\alpha = 0.05$).

اسئلة عامة حول الفصل السابع

س1: البيانات التالية، تمثل أوقات الانتظار (بالدقائق) لعشرة مرضى في إحدى العيادات الطبية قبل حصولهم على الخدمة.

وقت الانتظار(X)	17	25	15	28	25	20	35	20	26	24

المطلوب:

هل إن أوقات انتظار المرضى، تعطي دليلا كافيا على إن متوسط أوقات الانتظار تزيد على (20) دقيقة؟ إستخدم مستوى المعنوية ($\alpha = 0.01$).

س2: البيانات التالية، تمثل معدل الانتاجية (بالقطعة) لثمانية عمال، قبل وبعد إشتراكهم بدورة تدريبية ضمن اختصاصهم لتطوير الجانب المهاري لديهم.

الانتاجية قبل التدريب (X)	150	180	140	200	170	165	185	193
الانتاجية بعد التدريب (Y)	170	190	130	195	180	160	188	195

المطلوب:

إختبر الفرضية الاحصائية الآتية:

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$

$H_1 : \mu_1 < \mu_2$

باستخدام إختبار ولكوكسن لاشارة رتب الفرق المزدوج (Wilcoxon Matched Pairs)، مستخدما مستوى المعنوية ($\alpha = 0.05$).

س3: البيانات التالية، تمثل كمية النيكوتين (بالملغم) في نوعين من السكائر.

النوع (I)	4.0	2.1	5.3	6.2	3.6	6.0	4.7	3.3	-	-
النوع (II)	0.5	4.1	3.2	4.2	6.1	1.5	2.0	2.3	5.4	2.6

المطلوب:

إستخدم إختبار (Wilcoxon Ranks Sum Test)، لاختبار الفرض القائل "إن معدل النيكوتين في النوع (I) يقل عن معدله في النوع (II)"، مستخدما مستوى المعنوية ($\alpha = 0.05$) .

س4: البيانات الواردة بالجدول التالي، تمثل أعداد الطلبة لبعض الجنسيات العربية الملتحقين بالجامعات الأردنية، للعام الدراسي (1993/1992).

الدولة / الجنس	فلسطين	العراق	سوريا	لبنان	السودان	اليمن	عُمان
ذكور	2062	162	95	31	36	554	115
إناث	861	87	70	25	34	47	71

المطلوب:

إستخدم إختبار (Wilcoxon Ranks sum Test)، لاختبار الفرض القائل "إن توزيع الاناث يختلف عن توزيع الذكور"، مستخدما مستوى المعنوية ($\alpha = 0.05$).

س5: استخدم البيانات الورادة بالسؤال الرابع، التي تمثل اعداد الطلبة العرب الملتحقين بالجامعات الأردنية، للعام الدراسي (1993/1992).

وذلك لاختبار الفرض القائل "إن متوسط الطلبة الملتحقين من الاناث يزيد على متوسط الذكور"، مستخدما مستوى المعنوية ($\alpha = 0.05$).

س6: البيانات التالية، تمثل اوقات الاشتغال (بالساعات)، لثلاث أنواع من حاسبات الجيب (III , II , I).

النوع (I)	6.7	6.3	6.4	5.5	6.5	6.2	-
النوع (II)	5.3	5.4	5.7	6.1	5.1	4.7	5.4
النوع (III)	5.2	4.8	4.5	6.0	4.2	-	-

المطلوب:

إستخدم اختبار (Kruskal Wallis Test)، لاختبار الفرض القائل "إن متوسط أوقات الاشتغال متساوي للحاسبات الثلاث"، مستخدماً مستوى المعنوية ($\alpha = 0.01$).

س7: أختيرت ثلاث أنواع من السكائر عشوائيا، لاختبار كمية القطران التي تحتويها، وتم تسجيل معدلات كمية القطران (بالملغم) في (15) سيكارة يراد اختبارها، كما موضح بالجدول الآتي:

النوع (A)	16	19	18	20	17
النوع (B)	11	15	13	14	15
النوع (C)	13	11	12	10	14

المطلوب:

إستخدم إختبار (Kruskal Wallis Test)، لاختبار الفرض القائل "توجد فروق معنوية بين معدلات كمية القطران في أنواع السكائر الثلاثة"، مستخدما مستوى المعنوية ($\alpha = 0.05$).

س8: البيانات التالية، تمثل نتائج عشرة طلاب تم اختيارهم عشوائيا من أحد الاقسام العلمية في جامعة فيلادلفيا، في الامتحان النهائي لثلاث مساقات هي (بحوث العمليات، الاحصاء التطبيقي، الرياضيات).

رقم الطالب (القطاعات)	المساقات (المعالجات)		
	بحوث العمليات	الاحصاء التطبيقي	الرياضيات
1	75	72	81
2	99	70	93
3	98	95	77
4	88	81	83
5	82	80	87
6	83	77	80
7	76	80	91
8	95	71	79
9	95	81	84
10	80	86	72

المطلوب:

استخدم اختبار (Friedman Test)، لاختبار الفرض القائل "توجد فروق معنوية بين متوسطات نتائج الطلاب في المساقات الثلاثة"، مستخدما مستوى المعنوية ($\alpha = 0.01$).

س9: استخدم المعلومات الآتية:

$r_s = -0.38 \quad , \quad n = 50 \quad , \quad \alpha = 0.01$

المطلوب:

اختبر الفرضية الاحصائية الآتية:

$H_0: \rho_s = 0$

$H_1: \rho_s < 0$

باستخدام اختبار معامل ارتباط الرتب لسبيرمان (Spearman's Ranks Correlation).

س10: البيانات الواردة بالجدول المزدوج التالي، تمثل نتائج اختبار المستوى المهاري لـ (250) عامل، ومستوى ادائهم في العمل، تم اختيارهم عشوائيا من احدى المنشآت الانتاجية.

المستوى المهاري (X) / مستوى الاداء (Y)	مرتفع	متوسط	منخفض	Total
مرتفع	60	20	20	100
متوسط	40	30	30	100
منخفض	20	10	20	50
Total	120	60	70	250

المطلوب:

استخدم إختبار مربع كاي (χ^2)، لاختبار الفرض القائل "إن المستوى المهاري (X) للعمال مستقل عن مستوى أدائهم (Y)" ، مستخدما مستوى المعنوية ($\alpha = 0.05$) .

الفصل الثامن
السلاسل الزمنية
Time Series

1-8 : مقدمة :

ينطوي هذا الفصل على دراسة موضوع السلاسل الزمنية الذي يُعد من الأساليب الاحصائية المهمة لكونه يستحوذ اهتمام الكثير من متخذي القرارات في مختلف الاختصاصات، لاستخدامه في اغراض التنبؤ بالظواهر التي تتغير بمرور الزمن في كثير من المجالات، منها على سبيل المثال لا الحصر، المجالات الاقتصادية والادارية وقطاعات الصناعة والزراعة والتجارة، وفي مختلف العلوم الاخرى، نذكر منها على وجه التحديد العلوم الطبيعية بهدف دراسة بعض الظواهر المألوفة، كدراسة ظاهرة الزلازل والبراكين، وظاهرة الطقس والامطار.. الخ .

وسيتم التركيز في هذا الفصل، بشكل رئيسي على مفهوم السلاسل الزمنية والهدف من دراستها، بالاضافة الى تحليل السلسلة الزمنية أي (فصل مكونات السلسلة بعضها عن البعض الآخر)، لغرض تقدير كل مكون من مكوناتها بالطرق الاحصائية المناسبة، واعتمادها لاغراض التنبؤ بالظواهر المدروسة في المستقبل.

2-8 : مفهوم السلاسل الزمنية :

تُعرف السلسلة الزمنية بأنها: "مجموعة من القيم المشاهدة لظاهرة ما خلال فترات زمنية متساوية" وتكون الفترة الزمنية عادةً اما اسبوعية، او شهرية، أو فصلية، أو سنوية.

وعلى هذا الأساس، يمكن اعتبار صادرات العراق السنوية من التمور للفترة (1990-2000) سلسلة زمنية، واستيرادات الاردن السنوية من البترول للفترة (2000-2006) تُعد سلسلة زمنية، وإنتاج شركة الادوية الاردنية لدواء معين خلال شهر تموز لسنة (2006) تُعد سلسلة زمنية.

وتعرف السلسلة الزمنية رياضياً، بانها علاقة دالية بين قيمة الظاهرة (Y) والزمن (t) أي إن :

$Y = f(t)$

إن الهدف الرئيسي من دراسة السلاسل الزمنية، يتلخص بالآتي:

أ- التعرف على طبيعة التغيرات التي تطرأ على قيم الظاهرة خلال فترة زمنية محددة.

ب- تشخيص الاسباب التي أدت الى حدوث التغير في الظاهرة وتفسيرها.

جـ- اتخاذ القرارات المناسبة في حالات عدم التأكد لتحاشي الوقوع بالأخطاء.

د- التنبؤ بما سيحدث من تغيرات في قيم الظاهرة مستقبلاً، في ضوء ما حدث في الماضي.

8 – 3: تحليل السلسلة الزمنية :

يقصد بتحليل السلسلة الزمنية، هو "عملية فصل مكونات السلسلة بعضها عن البعض الآخر، بهدف تحديد تأثير كل مكون من هذه المكونات على قيم الظاهرة المدروسة".

وتكون مكونات السلسلة على أربعة أنواع رئيسة، هي:

أ- الاتجاه العام. Secular Trend

ب- التغيرات الموسمية. Seasonal Variations

جـ- التغيرات الدورية. Cyclical Variations

د- التغيرات العشوائية (غير المنتظمة). Random or Irregular Variations

ولوصف السلسلة الزمنية بدلالة مكوناتها، هناك نوعين من النماذج التي تستخدم لهذا الغرض، هما:

1- النموذج الضربي: Multiplicative Model

وهو عبارة عن " ضرب مكونات السلسلة الزمنية الاربعة "، أي إن:

$$Y = T * S * C * I \qquad \text{..............} \quad (1)$$

حيث إن:

Y : تمثل قيمة المشاهدة للظاهرة المدروسة.

T : يمثل الاتجاه العام للسلسلة.

S : يمثل المكون الموسمي للسلسلة.

C : يمثل المكون الدوري للسلسلة.

I : يمثل المكون العشوائي (غير المنتظم) للسلسلة.

ويُعد هذا النموذج من أكثر النماذج شيوعاً واستخداماً في وصف بيانات السلسلة الزمنية لكثير من الدراسات ولمختلف الاختصاصات في الحياة العملية.

2- النموذج الجمعي : Additive Model

وهو عبارة عن " جمع مكونات السلسلة الزمنية الاربعة "، أي إن :

$$Y = T + S + C + I \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

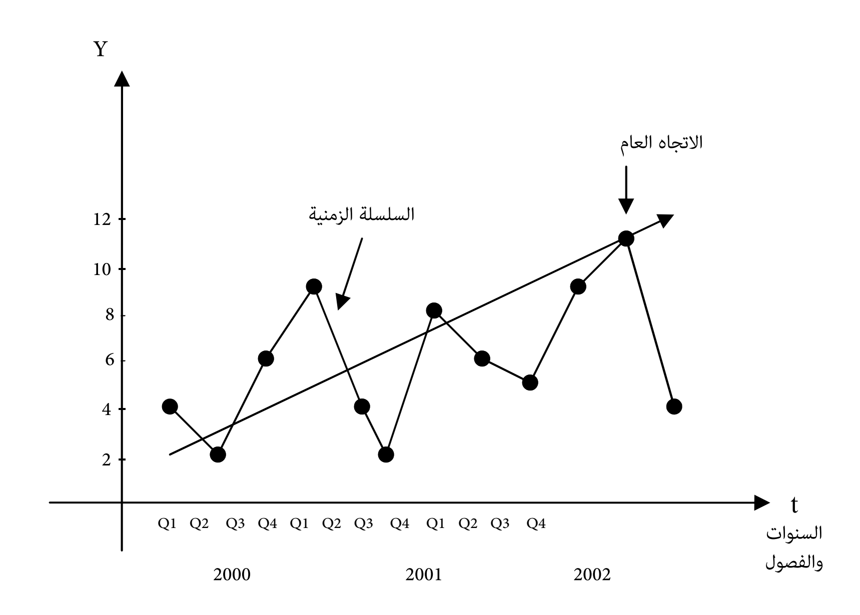
وفيما يلي شرحاً مفصلاً لكل مكون من مكونات السلسلة الزمنية، والتطرق الى اسلوب تقدير كل مكون من هذه المكونات باستخدام الطرق الاحصائية المناسبة، وعلى النحو الآتي:

8 – 3 – 1 : الاتجاه العام: Secular Trend

يُعرف الاتجاه العام للسلسلة بانه عبارة عن: "مقدار الاندفاع في الزيادة أو النقصان أو الثبوت في قيم ظاهرة ما خلال فترة زمنية معينة ".

إن الهدف من قياس الاتجاه العام للسلسلة الزمنية هو تشخيص العوامل المؤثرة في الاتجاه العام للسلسلة ومقارنة ذلك مع اتجاه السلسلة الاصلية، وتحديد عامل النمو على مستوى السلسلة الذي يُعد الاساس في عملية التنبؤ بسلوك الظاهرة قيد الدرس في المستقبل، إضافة الى ذلك إن قياس الاتجاه العام يساعدنا على ازالة او إستبعاد اثره من قيم الظاهرة المدروسة كي نتمكن من دراسة مكونات السلسلة الاخرى.

والشكل التالي، يوضح الاتجاه العام لمشاهدات ظاهرة ما خلال الفترة (2000 – 2002) ، والسلسلة الزمنية للقيم الاصلية للظاهرة.



وبشكل عام، يكون الاتجاه العام للسلسلة خطاً مستقيماً أو منحنياً أو شبه لوغارتمي أو أي شكل آخر في ضوء بيانات السلسلة الزمنية.

وسيتم التركيز في هذا الكتاب على ايجاد معادلة خط الاتجاه العام للسلسلة الزمنية بافتراض إن هذا الخط هو خط مستقيم، وسنتناول بشيء من التفصيل أهم الطرق المستخدمة في ايجاد معادلة خط الاتجاه العام للسلسلة الزمنية، وعلى النحو الآتي:

1- طريقة التمهيد باليد (الشكل الانتشاري) Scatter Diagram Method

2- طريقة متوسطي نصفي السلسلة Semi – Averages Method

3- طريقة المتوسطات المتحركة Moving Averages Method

4- طريقة المربعات الصغرى Least Squares Method

وفيما يلي شرحاً مفصلاً لكل طريقة من الطرق الآنفة الذكر:

اولا: طريقة التمهيد باليد (الشكل الانتشاري) : Scatter Diagram method

تُعد طريقة التمهيد باليد من أبسط طرق إيجاد معادلة خط الاتجاه العام للسلسلة، الا انها أقل دقة نظراً لاعتمادها على التقديرات الشخصية في عملية التمهيد، كون عملية تمهيد السلسلة الزمنية تختلف من شخص الى آخر.

وتتلخص خطوات هذه الطريقة، بما يأتي :

1- اسقاط كافة نقاط السلسلة الزمنية على المحورين للشكل الانتشاري، المتمثلة بالمحور الافقي الذي يمثل الزمن (t)، والمحور العمودي الذي يمثل قيم الظاهرة (Y)، وفقاً لاحداثياتها [(t_1, Y_1)، (t_2, Y_2) ، ....، (t_n, Y_n)] .

2- رسم خط مستقيم يمر بأكبر عدد ممكن من النقاط، لتمثيل الظاهرة افضل تمثيل، واختيار نقطتين تقعان على الخط الممهد، لاعتمادها في إيجاد معادلة خط الاتجاه العام، وفقاً للعلاقة الآتية:

$$\frac{\hat{Y} - Y_1}{t - t_1} = \frac{Y_2 - Y_1}{t_2 - t_1} \qquad ....(3)$$

3- نحصل على معادلة خط الاتجاه العام للسلسلة، بعد تبسيط العلاقة رقم (3)، وعلى النحو الآتي:

$$\hat{Y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 t \qquad .... (4)$$

حيث إن :

$\hat{Y}$: تمثل القيمة التقديرية للظاهرة المدروسة.

t : تمثل الزمن .

$\hat{a}_0 , \hat{a}_1$: معلمات خط الاتجاه العام للسلسلة التي تم الحصول عليها بموجب طريقة التمهيد باليد.

مثال (1) :

البيانات التالية، تمثل مبيعات العراق من محصول التمور (بالاف الاطنان) خلال الفترة (2000 – 2004).

السنوات	2000	2001	2002	2003	2004
مبيعات التمور (Y)	5	3	10	4	8

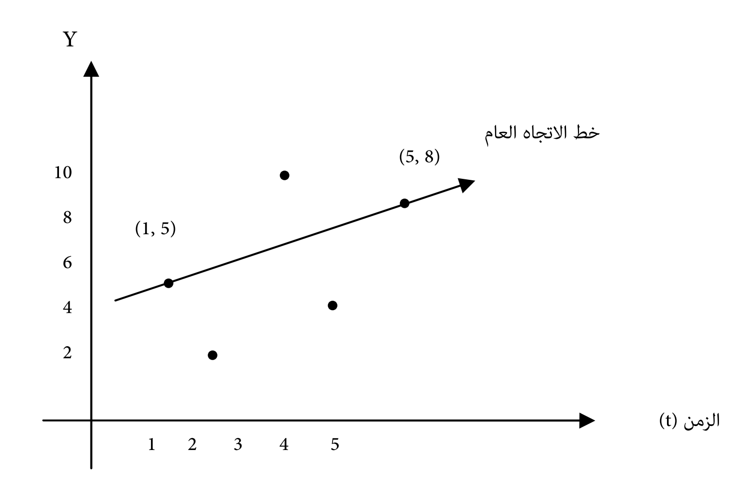
المطلوب:

ايجاد معادلة خط الاتجاه العام، باستخدام طريقة التمهيد باليد (الشكل الانتشاري).

الحل:

1- قبل البدء بعملية الرسم، نقوم باعطاء ترتيب للسنوات وتحديد احداثيات النقاط، على النحو الآتي:

احداثيات النقاط (t_i, Y_i)	Y	t
(1,5)	5	1
(2,3)	3	2
(3,10)	10	3
(4,4)	4	4
(5,8)	8	5



2- ايجاد معادلة خط الاتجاه العام، وفقاً للعلاقة الآتية :

$$\frac{\hat{Y}-Y_1}{t-t_1}=\frac{Y_2-Y_1}{t_2-t_1}$$

بما أن خط الاتجاه العام، يمر بالنقطتين [$(t_1, Y_1) = (1, 5)$، $(t_2, Y_2) = (5,8)$]، عليه فان:

$$\frac{\hat{Y}-5}{t-1}=\frac{8-5}{5-1}$$

3- بتبسيط العلاقة أعلاه، نحصل على معادلة خط الاتجاه العام، كالآتي :

$$\frac{\hat{Y}-5}{t-1}=\frac{3}{4}$$

$$\therefore\ 4(\hat{Y}-5) = 3\ (t-1)$$

$$4\hat{Y} - 20 = 3t - 3$$

$$4\hat{Y} = 17 + 3t$$

$$\hat{Y}=\frac{17}{4}+\frac{3}{4}t$$

$$\therefore\ \hat{Y} = 4.25 + 0.75\,t \quad \Longrightarrow \quad \text{line Trend Equation}$$

ثانياً – طريقة متوسطي نصفي السلسلة : Semi – Averages method

تُعد طريقة متوسطي نصفي السلسلة اكثر دقة مقارنة بطريقة التمهيد باليد، ولايجاد معادلة خط الاتجاه العام للسلسلة بموجبها، نتبع الخطوات الآتية :

1- تقسيم السلسلة الزمنية الى نصفين متساويين، ويتم حساب الوسط الحسابي لمشاهدات النصف الاول ($\overline{Y}_1$) ، والوسط الحسابي لمشاهدات النصف الثاني

($\overline{Y}_2$) ، مع مراعاة اهمال قيمة المشاهدة الوسطى، عندما يكون عدد السنوات فردي (Odd).

2- نقوم برصد الاوساط الحسابية للنصفين ($\overline{Y}_1$) و ($\overline{Y}_2$) مقابل منتصف الفترة الزمنية التي حُسبت على اساسها، ثم رسم خط مستقيم يصل بين النقطتين التي يتم رصدها على الشكل الانتشاري.

3- ايجاد معادلة خط الاتجاه العام، وفقاً للعلاقة الآتية :

$$\frac{\hat{Y} - Y_1}{t - t_1} = \frac{Y_2 - Y_1}{t_2 - t_1}$$

وبتبسيط العلاقة اعلاه، نحصل على معادلة خط الاتجاه العام، كالآتي :

$$\hat{Y} = a_0 + a_1 t$$

مثال (2): البيانات التالية، تمثل استيرادات العراق من حديد التسليح (بالاف الاطنان) خلال الفترة (1997 – 2002).

السنوات	1997	1998	1999	2000	2001	2002
الاستيرادات (Y)	100	80	120	140	160	120

المطلوب:

1- ايجاد معادلة خط الاتجاه العام، باستخدام طريقة متوسطي نصفي السلسلة.

2- التنبؤ بالاستيرادات $(\hat{Y})$ ، لسنة (2003).

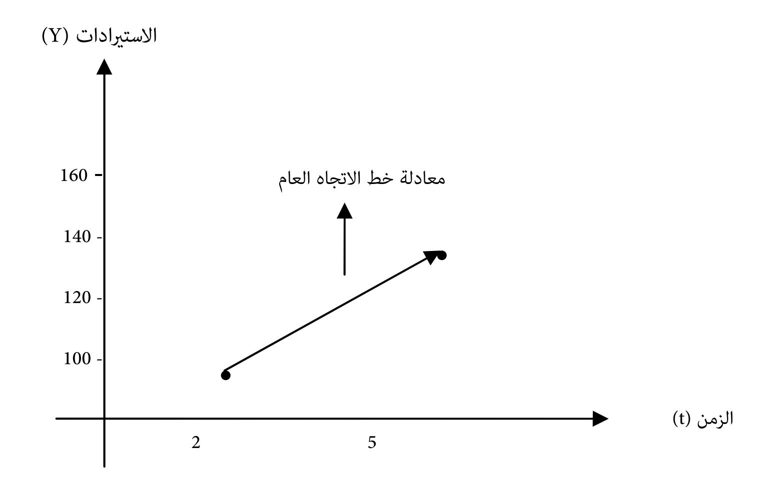
الحل:

1- ايجاد معادلة خط الاتجاه العام:

أ- تقسيم مشاهدات السلسلة الزمنية الى نصفين متساويين، وايجاد الوسط الحسابي لكل نصف، كالاتي :

t	Y	مجموع المشاهدات لكل نصف	الوسط الحسابي لكل نصف	احداثيات النقطتين
1	100	$\sum_{i=1}^{3} Y_i = 300$	$\overline{Y}_1 = 100$	(2,100)
2	80			
3	120			
4	140	$\sum_{i=4}^{6} Y_i = 420$	$\overline{Y}_2 = 140$	(5,140)
5	160			
6	120			

ب- نقوم برسم خط مستقيم يصل بين النقطتين، على النحو الآتي:



جـ- ايجاد معادلة خط الاتجاه العام، وفقاً للعلاقة الآتية:

$$\frac{\hat{Y} - Y_1}{t - t_1} = \frac{Y_2 - Y_1}{t_2 - t_1}$$

$$\therefore \frac{\hat{Y} - 100}{t - 2} = \frac{140 - 100}{5 - 2}$$

$$3 (\hat{Y} - 100) = 40 (t - 2)$$

$$3\hat{Y} - 300 = 40t - 80$$

$$3\hat{Y} = 220 + 40t$$

$$\therefore \hat{Y} = 73.33 + 13.33\,t \quad \Longrightarrow \quad \text{Line Trend Equation}$$

2- التنبؤ بالاستيرادات ($\hat{Y}$) لسنة (2003) :

إن الترتيب المناظر لسنة (2003) يساوي ($t = 7$)، عليه فان:

$$\hat{Y}_{2003} = 73.33 + 13.33\,(7)$$

$$= 166.64$$

$$\approx 167 \text{ Tho. Ton}$$

ثالثاً – طريقة المتوسطات المتحركة : Moving Averages method

تُعد طريقة المتوسطات المتحركة أكثر دقة من الطريقين السابقين، وتستخدم هذه الطريقة لتمهيد السلسلة الزمنية، وبالتالي تمهيد خط الاتجاه العام للسلسلة من خلال تخليص السلسلة الزمنية من التقلبات (التذبذبات) الشديدة قصيرة الامد التي تعاني منها السلسلة الزمنية.

ويُعرف المتوسط المتحرك بانه عبارة عن: " الوسط الحسابي لعدد من المشاهدات المتعاقبة في السلسلة بطول معين "، وغالباً ما يكون هذا الطول (3) سنوات أو (4) سنوات، ... الخ، ويفضل أختيار طول المتوسط المتحرك فردياً (Odd) من أجل الحصول على متوسطات متحركة مركزية.

وبافتراض لدينا(n) من المشاهدات هي (Y_1 , Y_2 , ... , Y_n) ، واردنا حساب المتوسط المتحرك بطول (3) سنوات او (3) فصول أو (3) أشهر، ففي هذه الحالة سيتم الحصول على المتوسطات المتحركة الآتية :

$$\overline{Y}_2 = \frac{Y_1 + Y_2 + Y_3}{3}$$

$$\overline{Y}_3 = \frac{Y_2 + Y_3 + Y_4}{3}$$

$$\overline{Y}_4 = \frac{Y_3 + Y_4 + Y_5}{3}$$

$$\vdots$$

$$\overline{Y}_{n-1} = \frac{Y_{n-2} + Y_{n-1} + Y_n}{3} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

وهنا ينبغي التأكيد على ما ياتي :

1- عندما يكون طول المتوسط المتحرك الذي يتم اختياره عدداً فردياً (Odd) ، فان المتوسط المتحرك الناتج، يسمى بالمتوسط المتحرك المركزي.

2- كلما كان طول المتوسط المتحرك كبيراً، كلما اصبحت السلسلة الزمنية اكثر نعومة (Smooth) ، ولكن سيؤدي ذلك الى فقدان بعض قيم السلسلة الزمنية.

مثال (3):

البيانات التالية، تمثل كمية الاستيرادات من حديد التسليح (بالآف الاطنان)، خلال الفترة (1997 – 2002).

السنوات	1997	1998	1999	2000	2001	2002
الاستيرادات (Y)	100	80	120	140	160	120

المطلوب:

1- احسب المتوسطات المتحركة بطول (3) سنوات.

2- إرسم السلسلة الزمنية الاصلية والمتوسطات المتحركة في شكل بياني واحد.

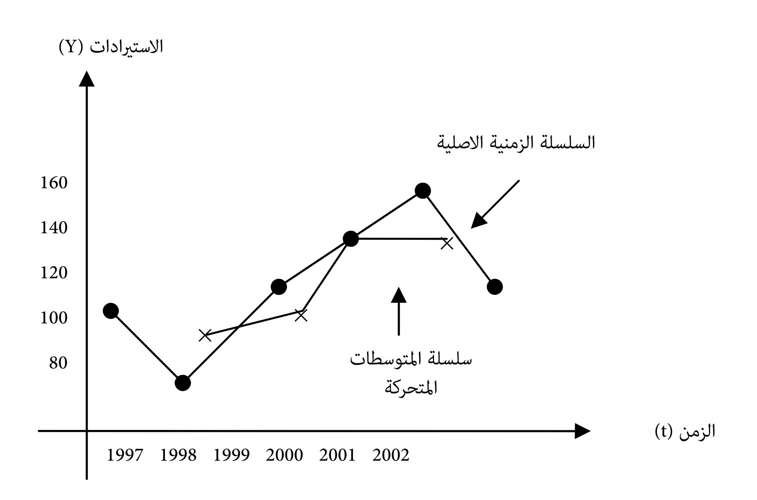
الحل:

1- المتوسطات المتحركة بطول (3) سنوات :

يمكن الحصول على المتوسطات المتحركة بطول (3) سنوات ، كالاتي:

السنوات	الاستيرادات (Y)	مجموع المشاهدات بطول (3) سنوات	المتوسط المتحرك المركزي بطول (3) سنوات
1997	100	-	-
1998	80	100+80+120=300	$\overline{Y}_2 = \frac{300}{3} = 100$
1999	120	80+ 120+140=340	$\overline{Y}_3 = \frac{340}{3} = 113.3$
2000	140	120+140+160=420	$\overline{Y}_4 = \frac{420}{3} = 140$
2001	160	140+160+120=420	$\overline{Y}_5 = \frac{420}{3} = 140$
2002	120	-	-

2- رسم السلسلة الزمنية الاصلية والمتوسطات المتحركة:



مثال (4):

البيانات التالية تمثل قيمة المبيعات الفصلية (بالاف الدنانير) لاحدى المؤسسات التجارية الأردنية، خلال الفترة (2002 – 2004).

السنوات والفصول	2002				2003				2004			
	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
قيمة المبيعات الفصلية (Y)	12	14	16	10	20	10	12	18	16	18	20	10

المطلوب:

1- إحسب المتوسطات المتحركة المركزية بطول (4) سنوات.

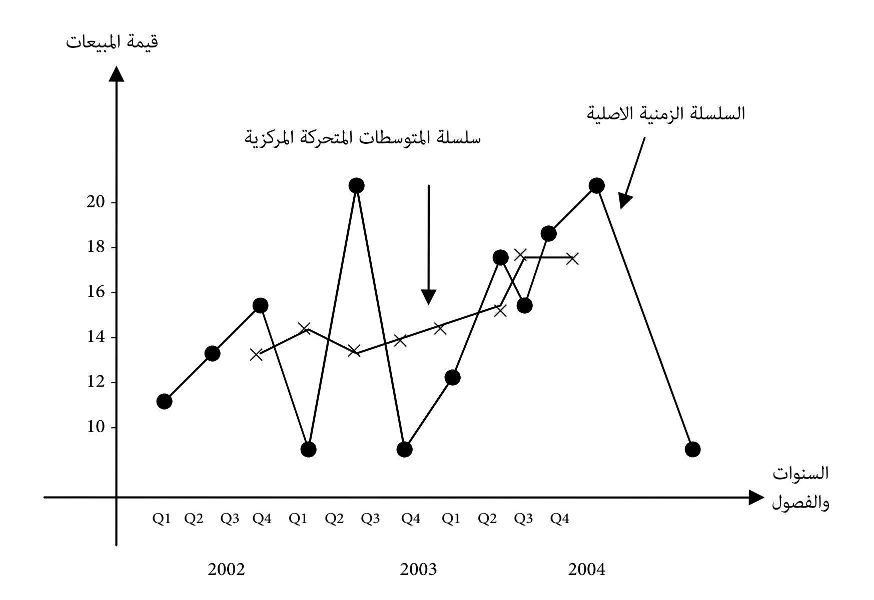
2- إرسم السلسلة الزمنية الاصلية والمتوسطات المتحركة المركزية في شكل بياني واحد.

الحل:

1- المتوسطات المتحركة بطول (4) فصول كالاتي:

السنوات	الفصول	قيمة المبيعات الفصلية (Y)	مجموع المشاهدات بطول (4) فصول	المتوسط المتحرك بطول (4) فصول	المتوسط المتحرك المركزي بطول (2) متوسطين
2002	Q_1	12	- -	- -	- -
	Q_2	14	$\sum_{i=1}^{4} Y_i = 52$	-	-
	Q_3	16	$\sum_{i=2}^{5} Y_i = 60$	13 15 }	14
	Q_4	10	$\sum_{i=3}^{6} Y_i = 56$	14	14.5
2003	Q_1	20	$= 52 \sum_{i=4}^{7} Y_i$	13	13.5
	Q_2	10	$= 60 \sum_{i=5}^{8} Y_i$	15	14
	Q_3	12	$\sum_{i=6}^{9} Y_i = 56$	14	14.5
	Q_4	18	$\sum_{i=7}^{10} Y_i = 64$	16	15
2004	Q_1	16	$\sum_{i=8}^{11} Y_i = 72$	18	17
	Q_2	18	$= 64 \sum_{i=9}^{12} Y_i$	16	17
	Q_3	20	-	-	-
	Q_4	10	-	-	-

2- رسم السلسلة الزمنية الاصلية والمتوسطات المتحركة المركزية :



رابعاً: طريقة المربعات الصغرى : Least Squares method

تُعد طريقة المربعات الصغرى من أهم وأدق الطرق المستخدمة في ايجاد معادلة خط الاتجاه العام.

ويمكن الحصول على معادلة خط الاتجاه العام بموجب هذه الطريقة، باستخدام نفس الاسلوب الذي تم اعتماده في ايجاد معادلة الانحدار الخطي البسيط، بعد افتراض إن الزمن (t) يمثل المتغير المستقل، وقيمة الظاهرة (Y) تمثل المتغير التابع.

وبافتراض إن خط الاتجاه العام هو خط مستقيم، فان معادلته، تأخذ الشكل الآتي:

$$Y_i = a_0 + a_1 t_i + \varepsilon_i \qquad \text{.............. (6)}$$

حيث إن :

Y_i : تمثل قيمة الظاهرة المدروسة.

t_i : تمثل الزمن .

a_0, a_1 : معلمات خط الاتجاه العام .

ε_i : تمثل حد الخطأ .

وللحصول على تقدير لمعلمات خط الاتجاه العام ($\hat{a}_0$, $\hat{a}_1$)، نستخدم نفس الصيغ السابقة المتعلقة بنموذج الانحدار الخطي البسيط، وعلى النحو الآتي :

$$\hat{a}_1 = \frac{\sum_{i}^{n} t_i Y_i - n\bar{t}\,\overline{Y}}{\sum_{i}^{n} t_i^2 - n\bar{t}^2} \qquad \text{................ (7)}$$

$$\hat{a}_0 = \overline{Y} - \hat{a}_1 \bar{t} \qquad \text{.................. (8)}$$

وبتعويض المعلمات المقدرة ($\hat{a}_0$, $\hat{a}_1$) التي تم الحصول عليها من تطبيق العلاقتين (7) و (8)، في معادلة خط الاتجاه العام الواردة بالعلاقة (1)، نحصل على معادلة خط الاتجاه العام التنبؤية، وعلى النحو الاتي :

$$\hat{Y}_T = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 t_i \Longrightarrow \text{Forecasting Equation} \qquad \text{................ (9)}$$

إن المعادلة التنبؤية الواردة بالعلاقة (9)، تمثل معادلة خط الاتجاه العام التنبؤية (السنوية)، اما اذا أردنا معادلة خط الاتجاه العام التنبؤية (الفصلية)، فتعطى بالعلاقة الآتية:

$$\hat{Y}_T = \frac{\hat{a}_0}{4} + \frac{\hat{a}_1}{4} \cdot \frac{t_i}{4}$$

$$\therefore\ \hat{Y}_T = \frac{\hat{a}_0}{4} + \frac{\hat{a}_1}{16} \cdot t_i \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. (10)$$

في حين تأخذ معادلة خط الاتجاه العام التنبؤية (الشهرية) ، الشكل الآتي :

$$\hat{Y}_T = \frac{\hat{a}_0}{12} + \frac{\hat{a}_1}{144} \cdot t_i \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

مثال (5):

البيانات التالية، تمثل مبيعات العراق من محصول التمور (بالآف الاطنان)، خلال الفترة الزمنية (2000 – 2004).

السنوات	2000	2001	2002	2003	2004
المبيعات (Y)	5	3	10	4	8

المطلوب:

1- ايجاد معادلة خط الاتجاه العام، باستخدام طريقة المربعات الصغرى.

2- رسم السلسلة الزمنية الاصلية، ومعادلة خط الاتجاه العام في شكل بياني واحد.

3- التنبؤ بمبيعات التمور ($\hat{Y}$) ، لسنة (2006) .

الحل:

1- ايجاد معادلة خط الاتجاه العام:

t_i^2	t_iY_i	المبيعات (Y_i)	ترتيب السنوات (t_i)
1	5	5	1
4	6	3	2
9	30	10	3
16	16	4	4
25	40	8	5
$t_i^2 \sum = 55$	$\sum t_iY_i = 97$	$\sum Y_i = 30$	$\sum t_i = 15$

$$\therefore \bar{t} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\therefore \overline{Y} = \frac{30}{5} = 6$$

$$\therefore \hat{a}_1 = \frac{\sum t_i Y_i - n\bar{t}\,\overline{Y}}{\sum t_i^2 - n\bar{t}^2}$$

$$= \frac{97 - (5)(3)(6)}{55 - 5(3)^2}$$

$$= \frac{7}{10}$$

$$= 0.7$$

$$\hat{a}_0 = \overline{Y} - \hat{a}_1 \bar{t}$$

$$= 6 - (0.7)\,(3)$$

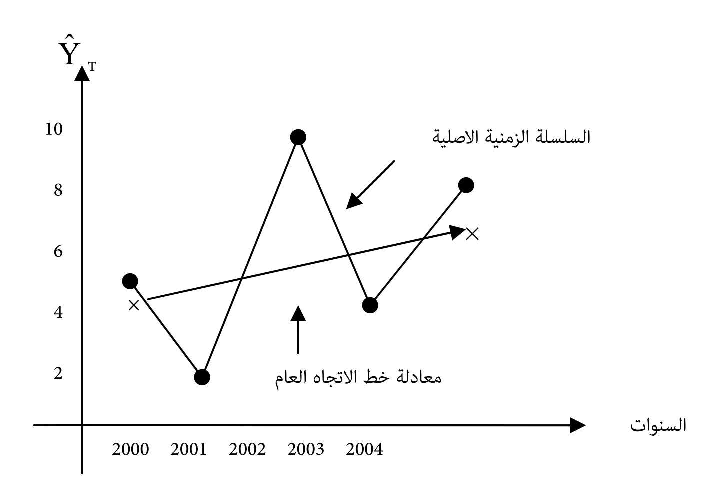
$$= 3.9$$

$$\because \hat{Y}_T = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 t_i$$

$\therefore \hat{Y}_T = 3.9 + 0.7\ t_i$ $\Rightarrow$ Forecasting Equation

2- رسم السلسلة الزمنية الاصلية، ومعادلة خط الاتجاه العام :

Year	t_i	$\hat{Y}_T = 3.9 + 0.7\ t_i$	احداثيات النقطتين
2000	1	4.6	(1 , 4.6)
2004	5	7.4	(5 , 7.4)



2- التنبؤ بمبيعات التمور $(\hat{Y})$ ، لسنة (2006) :

year	t_i
2000	1
2001	2
2002	3
2003	4
2004	5
2005	6
2006	7

$$\because \hat{Y}_T = 3.9 + 0.7 t_i$$

$$\therefore \hat{Y}_T = 3.9 + 0.7\ (7)$$

$$= 3.9 + 4.9$$

$$= 8.8 \text{ Tho. Ton}$$

8 – 3 – 2: إستبعاد أثر الاتجاه العام من مشاهدات السلسلة الزمنية :

بافتراض إن النموذج المستخدم لوصف السلسلة الزمنية، هو النموذج الضربي الذي يأخذ الشكل الآتي :

$$Y = T * S * C * I$$

يتضح من العلاقة أعلاه، بان المشاهدات الحقيقية للظاهرة (Y)، هي عبارة عن حاصل ضرب مكونات السلسلة الزمنية الاربعة المتمثلة، بالتغيرات الاتجاهية (T)، والتغيرات الفصلية (S)، والتغيرات الدورية (C)، والتغيرات غير المنتظمة (I).

ولغرض تخليص أو (تجريد) الظاهرة (Y) من أثر الاتجاه العام للسلسلة (T)، نتبع الخطوات الآتية:

1- تقدير معادلة خط الاتجاه العام للسلسلة [$T = \hat{Y} = \hat{a}_0 + t_i \hat{a}_1$] .

2- إيجاد القيم الاتجاهية (T) للظاهرة المدروسة .

3- حساب القيم النسبية للظاهرة (*Y) مجردة من اثر الاتجاه العام، وفقاً للعلاقة الآتية :

$$Y^* = \frac{Y}{T} * 100\%$$

$$= \frac{T * S * C * I}{T} * 100\%$$

$$= (S * C * I) * 100\%$$

حيث إن :

Y^* : تمثل القيم النسبية للظاهرة مجردة من أثر الاتجاه العام.

Y : تمثل القيم الحقيقية للظاهرة.

T : تمثل القيم الاتجاهية للظاهرة.

مثال (6) :

إستخدم معادلة خط الاتجاه العام التقديرية $\hat{Y}$ [T = = 3.9 +0.7 t_i] التي تم الحصول عليها من خلال تحليل البيانات الواردة بالمثال رقم (5)، والمتمثلة بمبيعات التمور (بالآف الاطنان)، خلال الفترة (2000 – 2004)، والموضحة بالجدول الآتي :

السنوات	2000	2001	2002	2003	2004
المبيعات (Y)	5	3	10	4	8

المطلوب:

إستبعاد أثر الاتجاه العام من قيم الظاهرة (Y).

الحل :

1- من معطيات المثال، إن معادلة خط الاتجاه العام هي[T = = 3.9 +0.7 t_i $\hat{Y}$.

2- إعتماد معادلة خط الاتجاه العام اعلاه، لحساب القيم الاتجاهية للظاهرة (T)، فعلى سبيل المثال، تحسب القيمة الاتجاهية للمبيعات لسنة (2000)، على النحو الآتي:

$T_{2000} = 3.9 + 0.7 \ (1)$

$= 4.6$

وهكذا بالنسبة لبقية القيم الاتجاهية للمبيعات، كما موضح بالجدول التالي، العمود رقم (4).

3- حساب القيم النسبية للظاهرة مجردة من اثر الاتجاه العام، وفقاً للعلاقة الآتية :

$$Y^* = \frac{Y}{T} * 100\%$$

فعلى سبيل المثال، تحسب القيمة النسبية لسنة (2000) على النحو الاتي :

$$Y^*_{2000} = \frac{5}{4.6} * 100\% = 108.7\%$$

وهكذا بالنسبة للقيم النسبية الاخرى، كما موضح بالجدول التالي، العمود رقم (5) .

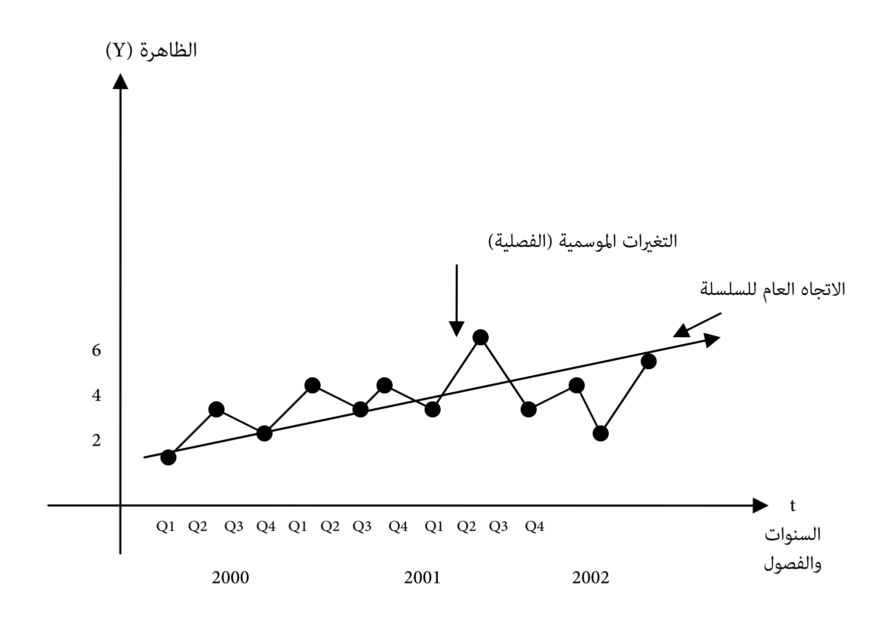
(5) = (3÷4) * 100% القيم النسبية للمبيعات مجردة من اثر الاتجاه $Y^* = \frac{Y}{T} * 100\%$	(4) القيم الاتجاهية للمبيعات $T = \hat{Y} = 3.9 + 0.7\ t_i$	(3) كمية المبيعات Y	(2) ترتيب السنوات t_i	(1) السنوات
108.7%	4.6	5	1	2000
56.6%	5.3	3	2	2001
166.7%	6.0	10	3	2002
59.7%	6.7	4	4	2003
108.1%	7.4	8	5	2004

3-3-8 : التغيرات الموسمية (الفصلية) : Seasonal Variations

تُعد التغيرات الموسمية من أهم العوامل المؤثرة على السلسلة الزمنية للظاهرة، وتحديداً الظواهر التي يتم تسجيل مشاهداتها بشكل فصلي أو شهري، إذ لا تتأثر الظواهر التي تكون مشاهداتها مسجلة بشكل سنوي بهذا النوع من التغيرات.

ونظراً لتأثير التغيرات الموسمية على مسار السلسلة الزمنية (فصلية كانت ام شهرية)، عليه ينبغي قياس التغيرات الموسمية بهدف استبعاد أو (إزالة) أثر هذا النوع من التغيرات، من قيم الظاهرة المدروسة، والحصول على مشاهدات معدلة للظاهرة ومخلصة من أثر التغيرات الموسمية، يطلق عليها بالمشاهدات المعدلة أو (المجردة) من أثر التغير الموسمي (الفصلي).

والشكل التالي، يوضح التغيرات الموسمية (الفصلية) للسلسلة الزمنية لظاهرة ما، خلال الفترة (2000 – 2002).



ولتقدير المؤشرات الموسمية (الفصلية)، والتخلص من اثر التغيرات الفصلية في قيم الظاهرة المدروسة، توجد عدة طرق تستخدم لهذا الغرض، هي :

1- طريقة النسبة الى المتوسط المتحرك. Ratio to Moving Average method
2- طريقة المتوسطات البسيطة. Simple Averages method
3- طريقة النسبة الى المتوسط العام. Ration to General Average method
4- طريقة النسبة الى الاتجاه العام. Ratio to Secular Trend method

وفيما يلي شرحاً مفصلاً لكل طريقة من الطرق السابقة:

اولاً: طريقة النسبة الى المتوسط المتحرك : Ratio to Moving Average method

تُعد طريقة النسبة الى المتوسط المتحرك، من الطرق الشائعة في تقدير التغيرات الموسمية (الفصلية)، ويتم بموجب هذه الطريقة إعتماد النموذج الضربي (Y=T*S*C*I) لوصف السلسلة الزمنية للظاهرة المدروسة، من جهة، ولازالة أثر هذا النوع من التغيرات في قيم الظاهرة، من جهة ثانية.

وتتلخص خطوات هذه الطريقة، بما يأتي:

1- حساب المتوسط المتحرك المركزي بطول مناسب، في ضوء بيانات السلسلة الزمنية (فصلية كانت ام شهرية).

2- ايجاد حاصل قسمة مشاهدات الظاهرة (Y) على المتوسط المتحرك المركزي، وضرب الناتج في (100%)، اي إن :

$$\frac{Y}{T*C}*100\% = \frac{T*S*C*I}{T*C}*100\%$$

$$= (S * I) * 100\%$$

وتنظيم النتائج التي يتم الحصول عليها بجدول آخر حسب السنوات والفصول.

3- حساب متوسطات المؤشرات الفصلية [100% (S * I)] ، التي تم الحصول عليها بالخطوة (2) حسب الفصول أو الاشهر، وايجاد مجموع المتوسطات.

4- تعديل قيم متوسطات المؤشرات الموسمية للفصول او الاشهر، وفقاً للعلاقة الآتية:

$$\text{المؤشر الموسمي المعدل } (S\%) = \frac{\text{متوسط الفصل أو (الشهر)}}{\text{مجموع متوسطات الفصول أو (الاشهر)}} * \text{عدد الفصول أو (الأشهر)} * 100\%$$

5- يتم إزالة أثر الموسم من مشاهدات الظاهرة (Y)، وفقاً للعلاقة الاتية :

مشاهدات الظاهرة مجردة من أثر الموسم = (مشاهدات الظاهرة (Y) ÷ المؤشر الموسمي المعدل (S%)) * 100%

مثال (7) :

إستخدم البيانات الواردة بالجدول التالي، التي تمثل قيمة المبيعات الفصلية (بالآف الدنانير) لاحدى المؤسسات التجارية، خلال الفترة (2002 – 2004).

السنوات	2002				2003				2004			
والفصول	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
قيمة المبيعات (Y)	12	14	16	10	20	10	12	18	16	18	20	10

المطلوب:

1- حساب المؤشرات الموسمية (S%) ، باستخدام طريقة النسبة الى المتوسط المتحرك.

2- إزالة أثر الموسم (التغير الفصلي) من مشاهدات الظاهرة (Y).

الحل :

1- حساب المؤشرات الموسمية (الفصلية) :

لحساب المؤشرات الموسمية، بموجب هذه الطريقة، تتبع الخطوات الآتية :

أ- حساب المتوسطات المتحركة بطول (4) فصول، على النحو الآتي :

(1) السنوات	(2) الفصول	(3) قيمة المبيعات الفصلية Y= T*S*C*I	(4) مجموع المشاهدات بطول (4) فصول	(5) المتوسط المتحرك بطول(4)فصول	(6) المتوسط المتحرك المركزي بطول (2) متوسطين	(7) = (3÷6)*100% المؤشرات الفصلية $\frac{Y}{T*C}*100\%$ = (S*I) 100%
2002	Q_1	12	-	-	-	-
	Q_2	14	-	-	-	-
	Q_3	16	52 60	13 15	14	114.3
	Q_4	10	56	14	14.5	69.0
2003	Q_1	20	52	13	13.5	148.1
	Q_2	10	60	15	14	71.4
	Q_3	12	56	14	14.5	82.8
	Q_4	18	64	16	15	120.0
2004	Q_1	16	72	18	17	94.1
	Q_2	18	64	16	17	105.9
	Q_3	20	-	-	-	-
	Q_4	10	-	-	-	-

ب- تلخيص نتائج المؤشرات الفصلية [100% (S * I)]، الواردة بالعمود رقم (7) من الجدول السابق، كالاتي :

الفصول / السنوات	المؤشرات الفصلية			
	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
2002	-	-	114.3	69.0
2003	148.1	71.4	82.8	120.0
2004	94.1	105.9	-	-
المجموع	242.2	177.3	197.1	189.0

جـ- حساب متوسطات المؤشرات الفصلية للفصول الاربعة، كما موضح بالجدول الآتي:

الفصول	المؤشرات الفصلية				المجموع
	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	
متوسطات الفصول	121.1	88.7	98.6	94.5	402.9

د- نقوم بتعديل قيم متوسطات الفصول، لان مجموع متوسطات الفصول الاربعة بلغ $\sum_{i}^{4}\overline{Q}_i$ = (402.9) وهو أكبر من (400)، وعلى النحو الآتي :

$$\text{المؤشر الموسمي المعدل (\%S)} = \frac{\text{متوسط الفصل } (\overline{Q}_i)}{\text{مجموع المتوسطات } \left(\sum_{i}^{4}\overline{Q}_i\right)} * \text{عدد الفصول} * 100\%$$

فعلى سبيل المثال، يتم حساب المؤشر الموسمي المعدل للفصل الاول (Q_1)، كالآتي:

$$\text{المؤشر الموسمي المعدل للفصل الاول} (Q_1) = \frac{121.1}{402.9} * 4 * 100\%$$

$$= 120.2\%$$

وبنفس الاسلوب يتم حساب المؤشرات الموسمية المعدلة (S%) للفصول الاخرى، كما هي موضحة بالجدول الآتي :

الفصول	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	المجموع
المؤشر الموسمي المعدل (S%)	120.2	88.1	97.9	93.8	400

2- إزالة أثر الموسم من مشاهدات الظاهرة (Y)، وفقاً للعلاقة الآتية :

$$\text{المشاهدات مجردة من اثر الموسم} = \frac{\text{مشاهدات الظاهرة (Y)}}{\text{المؤشر الموسمي المعدل (S\%)}} * 100\%$$

كما هو موضح بالجدول التالي، العمود رقم (5) :

(1) السنوات	(2) الفصول	(3) قيمة المبيعات الفصلية (Y)	(4) المؤشر الموسمي المعدل (S%)	(5)= (3÷4)* 100% قيمة المبيعات مجردة من اثر الموسم (التغير الفصلي)
2002	Q_1	12	120.2	10
	Q_2	14	88.1	16
	Q_3	16	97.9	16
	Q_4	10	93.8	11
2003	Q_1	20	120.2	17
	Q_2	10	88.1	11
	Q_3	12	97.9	12
	Q_4	18	93.8	19
2004	Q_1	16	120.2	13
	Q_2	18	88.1	20
	Q_3	20	97.9	20
	Q_4	10	93.8	11

ثانياً: طريقة المتوسطات البسيطة: Simple Averages method

تُعد طريقة المتوسطات البسيطة من ابسط الطرق المستخدمة في تقدير التغيرات الموسمية (فصلية كانت أم شهرية)، إلا إنها أقل إنتشاراً.

وتتلخص خطوات هذه الطريقة، بما يأتي :

1- حساب متوسطات الفصول ($\overline{Q}_i$) ، ثم ايجاد حاصل جمع المتوسطات $\left(\sum_i^4 \overline{Q}_i\right)$.

2- حساب المؤشرات الموسمية للفصول (S%)، وفقاً للعلاقة الآتية :

$$\text{المؤشر الموسمي المعدل } (S\%) = \frac{\text{متوسط الفصل } \left(\overline{Q}_i\right)}{\text{مجموع متوسطات الفصول } \left(\sum_i^4 \overline{Q}_i\right)} * \text{عدد الفصول} * 100\%$$

وتنظيم نتائج المؤشرات الموسمية (S%)، بجدول آخر حسب الفصول.

3- يتم إزالة أثر الموسم من مشاهدات الظاهرة (Y)، وفقاً للعلاقة الآتية :

$$\text{مشاهدات الظاهرة مجردة من اثر الموسم} = \frac{\text{مشاهدات الظاهرة } (Y)}{\text{المؤشر الموسمي } (S\%)} * 100\%$$

مثال (8) :

البيانات التالية، تمثل قيمة المبيعات الفصلية (بآلاف الدنانير)، لاحدى المؤسسات التجارية خلال الفترة (2002 – 2004).

السنوات والفصول	2002				2003				2004			
	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
قيمة المبيعات (Y)	12	14	16	10	20	10	12	18	16	18	20	10

المطلوب :

1- حساب المؤشرات الموسمية للفصول (S%)، باستخدام طريقة المتوسطات البسيطة.

2- إزالة أثر الموسم (التغير الفصلي) من مشاهدات الظاهرة (Y).

الحل :

1- حساب المؤشرات الموسمية (الفصلية) :

أ- نقوم باعادة تنظيم مشاهدات الظاهرة (Y) التي تمثل قيمة المبيعات بالجدول التالي، لغرض حساب متوسطات الفصول، وعلى النحو الآتي :

الفصول / السنوات	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
2002	12	14	16	10
2003	20	10	12	18
2004	16	18	20	10
مجموع مبيعات الفصول	48	42	48	38
متوسطات الفصول $\left(\overline{Q}_i\right)$	16	14	16	12.7
مجموع متوسطات الفصول $\left(\sum_{i}^{4}\overline{Q}_i\right)$	58.7			

ب- حساب المؤشرات الموسمية (الفصلية)، وفقاً للعلاقة الآتية :

$$\text{المؤشر الموسمي المعدل}(S\%) = \frac{\text{متوسط الفصل } \left(\overline{Q}_i\right)}{\text{مجموع المتوسطات } \left(\sum_{i}^{4} \overline{Q}_i\right)} * \text{عدد الفصول} * 100\%$$

فعلى سبيل المثال، يتم حساب المؤشر الموسمي للفصل الاول (Q_1)، كالآتي :

$$\text{المؤشر الموسمي للفصل الاول } (Q_1) = \frac{16}{58.7} * (4) * 100\%$$

$$= 109.03\%$$

وبنفس الاسلوب يتم حساب المؤشرات الموسمية للفصول الاخرى، ويتم تلخيصها بالجدول الاتي:

الفصول	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	المجموع
المؤشرات الموسمية (S%)	109.03	95.40	109.03	86.54	400

2- إزالة أثر الموسم من مشاهدات الظاهرة (Y) :

يمكن إزالة أثر الموسم (التغير الفصلي) من مشاهدات الظاهرة (Y)، وفقاً للعلاقة الآتية :

$$\text{المشاهدات مجردة من اثر الموسم} = \frac{\text{مشاهدات الظاهرة (Y)}}{\text{المؤشر الموسمي (S\%)}} * 100\%$$

كما موضح بالعمود رقم (5) من الجدول الآتي :

(1) السنوات	(2) الفصول	(3) المبيعات الفصلية (Y)	(4) المؤشر الموسمي المعدل (%S)	(5)= (3÷4)* 100% المبيعات مجردة من اثر الموسم (التغير الفصلي)
2002	Q_1	12	109.03	11
	Q_2	14	95.40	15
	Q_3	16	109.03	15
	Q_4	10	86.54	11
2003	Q_1	20	109.03	18
	Q_2	10	95.40	10
	Q_3	12	109.03	11
	Q_4	18	86.54	21
2004	Q_1	16	109.03	15
	Q_2	18	95.40	19
	Q_3	20	109.03	18
	Q_4	10	86.54	12

ثالثاً: طريقة النسبة الى المتوسط العام : Ratio to General Average method

تُعد طريقة النسبة الى المتوسط العام من الطرق الشائعة في تقدير التغيرات الموسمية (الفصلية أو الشهرية)، وهي أكثر دقة من طريقة المتوسطات البسيطة.

وتتلخص خطوات هذه الطريقة، بما يأتي :

1- حساب متوسطات الفصول $\left(\overline{Q}_i\right)$.

2- حساب المتوسط العام، وفقاً لاحدى العلاقتين الآتيتين :

$$\text{أ- المتوسط العام} = \frac{\text{مجموع مشاهدات الظاهرة (Y)}}{\text{عدد المشاهدات الكلي [عدد الفصول × عدد السنوات]}}$$

$$\text{ب- المتوسط العام} = \frac{\text{مجموع متوسطات الفصول } \left(\sum_{i}^{4} \overline{Q}_i\right)}{\text{عدد الفصول}}$$

3- حساب الدليل الموسمي للفصول، وفقاً للعلاقة الاتية :

$$\text{الدليل الموسمي } (S\%) = \frac{\text{متوسط الفصل } \left(\overline{Q}_i\right)}{\text{المتوسط العام}} * 100\%$$

4- يتم إزالة أثر الموسم من قيم الظاهرة (Y)، وفقاً للعلاقة الآتية :

$$\text{مشاهدات الظاهرة مجردة من اثر الموسم} = \frac{\text{مشاهدات الظاهرة } (Y)}{\text{الدليل الموسمي } (S\%)} * 100\%$$

مثال (9) :

البيانات التالية، تمثل قيمة المبيعات الفصلية (بالآف الدنانير) لاحدى المؤسسات التجارية خلال الفترة (2002 – 2004).

السنوات والفصول	2002				2003				2004			
	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
قيمة المبيعات (Y)	12	14	16	10	20	10	12	18	16	18	20	10

المطلوب:

1- حساب الدليل الموسمي للفصول (S%)، باستخدام طريقة النسبة الى المتوسط العام.

2- إزالة أثر الموسم (التغير الفصلي) من مشاهدات الظاهرة (Y).

الحل:

1- حساب الدليل الموسمي للفصول (S%) :

لحساب الأدلة الموسمية للفصول، نتبع الخطوات الآتية :

أ- إعادة تنظيم مشاهدات الظاهرة (Y)، لغرض حساب متوسطات الفصول $\left(\overline{Q}_i\right)$ ، كما موضح بالجدول الآتي :

الفصول / السنوات	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
2002	12	14	16	10
2003	20	10	12	18
2004	16	18	20	10
مجموع المبيعات الفصلية	48	42	48	38
متوسطات الفصول $\left(\overline{Q}_i\right)$	16	14	16	12.7

ب- حساب المتوسط العام للفصول، على النحو الآتي :

$$\text{المتوسط العام للفصول} = \frac{\text{مجموع مشاهدات الظاهرة } (Y)}{\text{عدد الفصول} \times \text{عدد السنوات}}$$

$$\therefore \text{المتوسط العام للفصول} = \frac{176}{3 * 4}$$

$$= 14.67$$

أو يمكن ايجاد المتوسط العام للفصول، وفقاً للعلاقة الثانية، كالآتي :

$$\text{المتوسط العام للفصول} = \frac{\text{مجموع متوسطات الفصول} \left(\sum_{i}^{4} \overline{Q}_i \right)}{\text{عدد الفصول}}$$

$$= \frac{12.7 + 16 + 14 + 16}{4}$$

$$= 14.67$$

جـ- حساب الادلة الموسمية للفصول، وفقاً للعلاقة الآتية:

$$\text{الدليل الموسمي}(\%S) = \frac{\text{متوسط الفصل } (\overline{Q}_i)}{\text{المتوسط العام للفصول}} * 100\%$$

فعلى سبيل المثال، يتم حساب الدليل الموسمي للفصل الاول (Q_1)، كالاتي :

$$\text{الدليل الموسمي للفصل الأول } (Q_1) = \frac{16}{14.67} * 100\%$$

$= 109\%$

وبنفس الاسلوب نقوم بحساب الادلة الموسمية للفصول الاخرى، وتلخيصها بالجدول الآتي:

الفصول	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	المجموع
الدليل الموسمي (S%)	109	95.4	109	86.6	400

2- إزالة أثر الموسم من مشاهدات الظاهرة (Y) :

يمكن إزالة أثر الموسم من مشاهدات الظاهرة (Y)، وفقاً للعلاقة الآتية :

$$\text{المشاهدات مجردة من اثر الموسم} = \frac{\text{مشاهدات الظاهرة } (Y)}{\text{الدليل الموسمي } (\%S)} * 100\%$$

والعمود رقم (5)، من الجدول التالي، يوضح ذلك :

(1) السنوات	(2) الفصول	(3) المبيعات الفصلية (Y)	(4) الأدلة الموسمية (%S)	(5)= (3÷4)* 100% المبيعات مجردة من أثر الموسم (التغير الفصلي)
2002	Q_1	12	109.0	11
	Q_2	14	95.4	15
	Q_3	16	109.0	15
	Q_4	10	86.6	11
2003	Q_1	20	109.0	18
	Q_2	10	95.4	10
	Q_3	12	109.0	11
	Q_4	18	86.6	21
2004	Q_1	16	109.0	15
	Q_2	18	95.4	19
	Q_3	20	109.0	18
	Q_4	10	86.6	12

رابعاً: طريقة النسبة الى الاتجاه العام: Ratio to secular Trend method

تُعد طريقة النسبة الى الاتجاه العام من أهم الطرق المستخدمة في تقدير التغيرات الموسمية (الفصلية) وأدقها، وتتفوق هذه الطريقة على الطرق الاخرى، كونها تساعدنا على تخليص أو (تجريد) مشاهدات السلسلة الزمنية للظاهرة (Y) من أثر الاتجاه العام أولاً، والى امكانية ايجاد القيم التنبؤية $\left(\hat{Y}_F\right)$ للظاهرة (Y) في المستقبل، اعتماداً على قيم المؤشرات الموسمية المعدلة (S%) ثانياً.

وتتلخص خطوات هذه الطريقة، بما يأتي :

1- تقدير معادلة خط الاتجاه العام [$\hat{Y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 t$]، باستخدام طريقة المربعات الصغرى.

2- حساب القيم الاتجاهية للظاهرة ($T\hat{Y}=$)، إعتماداً على معادلة خط الاتجاه العام.

3- تجريد مشاهدات الظاهرة (Y) من اثر الاتجاه العام (T)، وفقاً للعلاقة الآتية :

$$\frac{Y}{\hat{Y} = T} * 100\% = \frac{T * S * C * I}{T} * 100\%$$

$$= (S * C * I) * 100\%$$

4- فصل التغيرات الموسمية (الفصلية) (S) عن التغيرات الدورية والشعوائية (C * I)، ويتم ذلك من خلال ايجاد المؤشرات الموسمية المعدلة (S%)، وفقاً للعلاقة الآتية :

المؤشر الموسمي المعدل (S%) = $\frac{\text{متوسط الفصل } (\overline{Q}_i)}{\text{مجموع المتوسطات } \left(\sum_{i}^{4} \overline{Q}_i\right)}$ * عدد الفصول * 100%

5- يتم إزالة (تخليص) مشاهدات الظاهرة (Y) من اثر الموسم (التغير الفصلي)، باعتماد نفس الاسلوب المتبع في طريقة النسبة الى المتوسط المتحرك.

6- حساب القيم التنبؤية $(\hat{Y}_F)$ للظاهرة، اعتماداً على المؤشرات الموسمية المعدلة (S%)، وعلى النحو الآتي:

$$\hat{Y}_F = T * S\%$$

$$= \frac{T * S}{100}$$

مثال (10):

استخدم نفس البيانات الواردة بالمثال السابق، والتي تمثل المبيعات الفصلية (بالآف الدنانير) لاحدى المؤسسات التجارية، خلال الفترة (2002 – 2004).

السنوات والفصول	2002				2003				2004			
	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
قيمة المبيعات(Y)	12	14	16	10	20	10	12	18	16	18	20	10

المطلوب:

1- ايجاد معادلة الاتجاه العام، باستخدام طريقة المربعات الصغرى.
2- إستبعاد أثر الاتجاه العام من مشاهدات الظاهرة (Y).
3- حساب المؤشرات الموسمية المعدلة للفصول (S%).
4- تخليص مشاهدات الظاهرة (Y) من اثر الموسم (التغير الفصلي).
5- التنبؤ بقيم المبيعات الفصلية لسنة (2005).

الحل :

1- ايجاد معادلة خط الاتجاه العام :

يوضح الجدول التالي، آلية ايجاد معادلة خط الاتجاه العام، باستخدام طريقة المربعات الصغرى:

السنوات	الفصول	ترتيب الفصول t_i	المبيعات الفصلية Y_i	$t_i Y_i$	t_i^2
2002	Q_1	1	12	12	1
	Q_2	2	14	28	4
	Q_3	3	16	48	9
	Q_4	4	10	40	16
2003	Q_1	5	20	100	25
	Q_2	6	10	60	36
	Q_3	7	12	84	49
	Q_4	8	18	144	64
2004	Q_1	9	16	144	81
	Q_2	10	18	180	100
	Q_3	11	20	220	121
	Q_4	12	10	120	144
-	-	$\sum t_i = 78$	$\sum Y_i = 176$	$\sum t_i Y_i = 1180$	$\sum t_i^2 = 650$

$$\because \bar{t} = \frac{\sum t_i}{12}$$

$$= \frac{78}{12}$$

$$= 6.5$$

$$\because \overline{Y} = \frac{176}{12}$$

$$= 14.67$$

$$\therefore \hat{a}_1 = \frac{\sum t_i Y_i - n\bar{t}\,\overline{Y}}{\sum t_i^2 - n\bar{t}^2}$$

$$= \frac{1180 - 12(6.5)(14.67)}{650 - 12(6.5)^2}$$

$$= 0.25$$

$$\hat{a}_0 = \overline{Y} - \hat{a}_1 \bar{t}$$

$$= 14.67 - 0.25\ (6.5)$$

$$= 13.045$$

$$\therefore \hat{Y}_i = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 t_i$$

$$= 13.045 + 0.25\ t_i$$

2- إستبعاد أثر الاتجاه العام من مشاهدات الظاهرة (Y) :

لتخليص مشاهدات الظاهرة (Y) من أثر الاتجاه العام، نتبع الآتي :

أ- ايجاد القيم الاتجاهية للظاهرة $(\hat{Y}=T)$ ، بعد التعويض بترتيب الفصول (t_i = 1, 2, 3, ..., 12) في معادلة الاتجاه العام التقديرية $\left[\hat{Y}=13.045+0.25t_i\right]$، كما موضح بالعمود رقم (5) من الجدول التالي.

ب- حساب مشاهدات الظاهرة (Y) مجردة من اثر الاتجاه العام، وفقاً للعلاقة الآتية:

$$\frac{Y}{T}*100\%=\frac{T*S*C*I}{T}*100\%$$

$$= (S * C * I) * 100\%$$

كما موضح بالعمود رقم (6) من الجدول التالي :

(1) السنوات	(2) الفصول	(3) ترتيب الفصول t_i	(4) قيمة المبيعات Y	(5) القيم الاتجاهية للمبيعات $\hat{Y}=T=13.045+0.25t_i$	(6) = (4÷5)* 100% المبيعات مجردة من أثر الاتجاه العام $\frac{Y}{T}*100\%=(S*C*I)*100\%$
2002	Q_1	1	12	13.295	90.26
	Q_2	2	14	13.545	103.36
	Q_3	3	16	13.795	115.98
	Q_4	4	10	14.045	71.20
2003	Q_1	5	20	14.295	139.91
	Q_2	6	10	14.545	68.75
	Q_3	7	12	14.795	81.11
	Q_4	8	18	15.045	119.64
2004	Q_1	9	16	15.295	104.61
	Q_2	10	18	15.545	115.79
	Q_3	11	20	15.795	126.62
	Q_4	12	10	16.045	62.32

3- حساب المؤشرات الموسمية المعدلة للفصول (S%) :

لحساب المؤشرات الموسمية المعدلة (S%)، نتبع الخطوات الاتية :

أ- نقوم بتنظيم نسب قيم المبيعات مجردة من أثر الاتجاه العام، الواردة بالعمود رقم (6) في الجدول السابق، على النحو الآتي :

الفصول / السنوات	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
2002	90.26	103.36	115.98	71.20
2003	139.91	68.75	81.11	119.64
2004	104.61	115.79	126.62	62.32
مجموع المبيعات الفصلية	334.78	287.90	323.71	253.16

ب- نقوم بحساب متوسطات نسب المبيعات الفصلية مجردة من اثر الاتجاه العام، على النحو الآتي :

الفصول	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	المجموع
متوسطات الفصول	111.59	95.97	107.90	84.39	399.85

جـ- نقوم بتعديل متوسطات الفصول، للحصول على مجموع المتوسطات مساوٍ إلى (400)، وفقاً للعلاقة الآتية :

$$\text{المؤشر الموسمي المعدل (S\%)} = \frac{\text{متوسط الفصل}}{\text{مجموع المتوسطات}} \text{ * عدد الفصول * } 100\%$$

فعلى سبيل المثال، يُحسب المؤشر الموسمي المعدل للفصل الاول، على النحو الاتي :

$$\text{المؤشر الموسمي المعدل للفصل الاول } (Q_1) = \frac{111.59}{399.85} * 4 * 100\%$$

$= 111.63$

وهكذا بالنسبة للمؤشرات الموسمية المعدلة للفصول الاخرى، والجدول التالي يوضح ذلك:

الفصول	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	المجموع
المؤشر الموسمي المعدل (S%)	111.63	96.01	107.94	84.42	400

4- تخليص مشاهدات الظاهرة (Y) من أثر الموسم:

لازالة أثر الموسم (التغير الفصلي) من قيم المبيعات الفصلية (Y)، يتم على النحو الآتي:

$$\text{قيم المبيعات مجردة من اثر الموسم} = \frac{\text{المبيعات الفصلية (Y)}}{\text{المؤشر الموسمي المعدل (S\%)}} * 100\%$$

والجدول التالي، يلخص قيم المبيعات الفصلية مجردة من اثر الموسم (التغير الفصلي) :

(1) السنوات	(2) الفصول	(3) المبيعات الفصلية (Y)	(4) المؤشر الموسمي المعدل (S%)	(5)= (3÷4)* 100% قيم المبيعات مجردة من اثر الموسم (Y / S%) *100%
2002	Q_1	12	111.63	11
	Q_2	14	96.01	14
	Q_3	16	107.94	15
	Q_4	10	84.42	12
2003	Q_1	20	111.63	18
	Q_2	10	96.01	10
	Q_3	12	107.94	11
	Q_4	18	84.42	21
2004	Q_1	16	111.63	14
	Q_2	18	96.01	19
	Q_3	20	107.94	19
	Q_4	10	84.42	12

5- التنبؤ بقيم المبيعات الفصلية لسنة (2005) :

يمكن الحصول على القيم التنبؤية للمبيعات الفصلية لسنة (2005)، من خلال تطبيق العلاقة الآتية:

$$\hat{Y}_F = \frac{T * S}{100}$$

فعلى سبيل المثال، تُحسب القيمة التنبؤية لمبيعات الفصل الاول (Q_1) كالاتي:

$$\hat{Y}_{13} = \frac{(16.295)(111.63)}{100} = 18$$

وبنفس الاسلوب يتم حساب بقية القيم التنبؤية للمبيعات الفصلية، كما موضح بالجدول الآتي:

(1) السنة	(2) الفصول	(3) ترتيب الفصول t_i	(4) القيم الاتجاهية للمبيعات $T=\hat{Y}=13.045+0.25t_i$	(5) المؤشرات الموسمية المعدلة (%S)	(6) = (4*5) / 100% القيم التنبؤية للمبيعات $\hat{Y}_F$ = (T*S) /100
2005	Q_1	13	16.295	111.63	18
	Q_2	14	16.545	96.01	16
	Q_3	15	16.795	107.94	18
	Q_4	16	17.045	84.42	14

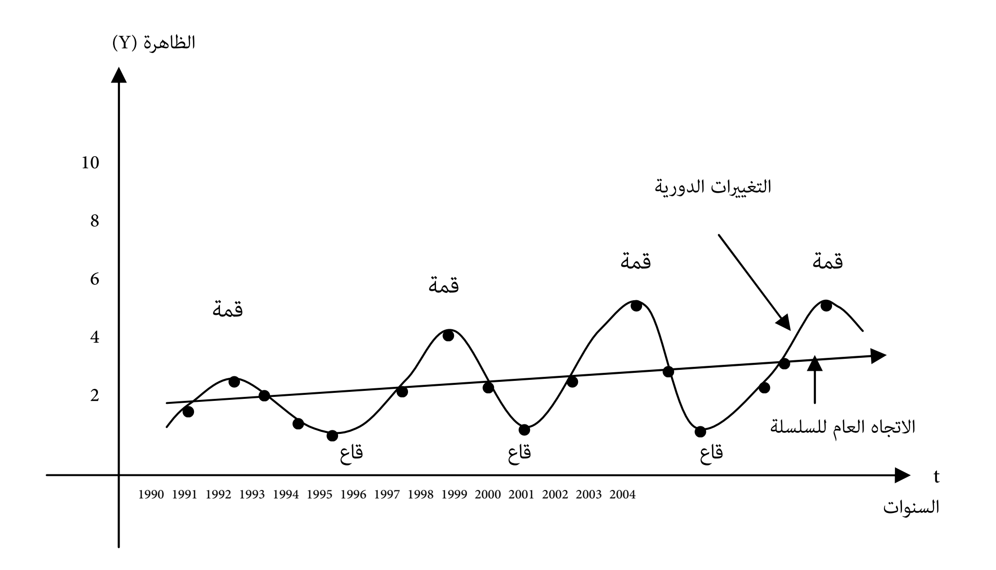
8- 3 – 4: التغيرات الدورية: Cyclical Variations

تُعرف التغيرات الدورية، بانها " التحركات طويلة الامد التي تتكرر صعوداً ونزولاً على خط الاتجاه العام للسلسلة الزمنية لظاهرة ما ".

إن من أهم الاسباب التي تؤدي الى حدوث التغيرات الدورية في السلاسل الزمنية للظواهر ذات الطابع الاقتصادي أو التجاري هي الأسباب الاقتصادية، مما يطلق على هذا النوع من التغيرات بالدورات الاقتصادية، إذ تعكس الفترات الزمنية المتعاقبة للظواهر الاقتصادية حالات الكساد أو الرفاه الاقتصادي التي تتصف بها اقتصادات بعض الدول.

تحدث التغيرات الدورية بشكل منتظم، نتيجة تأثر السلسلة الزمنية بعوامل دورية وبأقل عدد من التغيرات الفصلية، مثال ذلك فترات تساقط الامطار وكمياتها، فانها تتفاوت من سنة الى أخرى، وكذلك تقلبات الاسعار لبعض السلع المعمرة، ويمكن الحصول على دورة واحدة للسلسلة الزمنية بين كل قمتين او قاعين على منحنى السلسلة، مما يتطلب ان تكون السلسلة الزمنية بفترات زمنية طويلة من أجل تكرار حدوث التغيرات
الدورية، ولتقدير هذا النوع من التغيرات نحتاج الى أكثر من ستة دورات كاملة من المشاهدات.

والشكل التالي، يوضح طبيعة التغيرات الدورية للسلسلة الزمنية لظاهرة ما، خلال الفترة (1990 – 2004).



ولغرض تقدير التغيرات الدورية وفصلها عن بقية مكونات السلسلة الزمنية الاخرى، نتبع الخطوات الآتية:

1- استخدام النموذج الضربي ($Y = T * S * C * I$) لوصف السلسلة الزمنية للظاهرة.

2- ايجاد معادلة خط الاتجاه العام التقديرية [$\hat{Y} = T = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 t$]، باستخدام طريقة المربعات الصغرى.

3- ايجاد النسب المئوية لقيم الظاهرة (Y) مجردة من أثر الاتجاه العام (T)، وفقاً للاتي :

$$\frac{Y}{T} * 100\% = \frac{T * S * C * I}{T} * 100\%$$

$$= (S * C * I) * 100\%$$

4- حساب المؤشرات الموسمية المعدلة (S%)، باستخدام طريقة النسبة الى الاتجاه العام.
5- إيجاد النسب الدورية للسلسلة الزمنية، وفقاً للعلاقة الآتية :

$$\frac{Y}{T*S}*100\% = \frac{(S*C*I)*100\%}{S\%}$$

$$= (C * I) * 100\%$$

تنطوي الخطوة الخامسة، على تقدير التغيرات الدورية (C) والتغيرات غير المنتظمة (I) في آن واحد، نظراً لحدوث التغيرات غير المنتظمة (I) مرة واحدة وبشكل متباعد خلال الفترة، او عدم حدوثها نهائياً خلال الفترة الزمنية للظاهرة قيد الدرس.

مثال (11) :

البيانات التالية، تمثل كمية الانتاج (بالآف الاطنان) لاحد المحاصيل الزراعية، خلال الفترة (2000 – 2002).

السنوات والفصول	2000				2001				2002			
	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
كمية الانتاج (Y)	20	26	18	21	24	30	29	28	31	28	20	25

المطلوب:

حساب النسب الدورية لكميات الانتاج للفترة الزمنية المذكورة.

الحل:

لحساب النسب الدورية لكميات الانتاج، نتبع الخطوات الاتية :

1- ايجاد معادلة خط الاتجاه العام، باستخدام طريقة المربعات الصغرى، كالاتي :

السنوات	الفصول	ترتيب الفصول t_i	كمية الانتاج Y_i	$t_i Y_i$	t_i^2
2000	Q_1	1	20	20	1
	Q_2	2	26	52	4
	Q_3	3	18	54	9
	Q_4	4	21	84	16
2001	Q_1	5	24	120	25
	Q_2	6	30	180	36
	Q_3	7	29	203	49
	Q_4	8	28	224	64
2002	Q_1	9	31	279	81
	Q_2	10	28	280	100
	Q_3	11	20	220	121
	Q_4	12	25	300	144
-	-	$\sum t_i = 78$	$\sum Y_i = 300$	$\sum t_i Y_i = 2016$	$\sum t_i^2 = 650$

$$\because \bar{t} = \frac{78}{12} = 6.5$$

$$\because \overline{Y} = \frac{300}{12} = 25$$

$$\therefore \hat{a}_1 = \frac{\sum t_i Y_i - n\bar{t}\,\overline{Y}}{\sum t_i^2 - n\bar{t}^2}$$

$$= \frac{2016 - 12(6.5)(25)}{650 - 12(6.5)^2}$$

$$= 0.46$$

$$\hat{a}_0 = \overline{Y} - \hat{a}_1 \bar{t}$$

$$= 25 - 0.46(6.5)$$

$$= 22.01$$

$$\therefore \hat{Y}_i = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 t_i$$

$$= 22.01 + 0.46 \ t_i$$

2- ايجاد النسب المئوية لكميات الانتاج مجردة من أثر الاتجاه العام (T)، بعد قسمة كميات الانتاج (Y) على القيم الاتجاهية للانتاج (T) وضرب الناتج في (100%)، كما موضح بالجدول التالي، العمود رقم (6):

(1) السنوات	(2) الفصول	(3) ترتيب الفصول t_i	(4) قيمة الانتاج Y_i	(5) القيم الاتجاهية للانتاج $T= \hat{Y} = 22.01+ 0.46 \ t_i$	(6) = (4÷5)* 100% كمية الانتاج مجردة من أثر الاتجاه العام $\frac{Y}{T}*100\% = (S*C*I)*100\%$
2000	Q_1	1	20	22.47	89.01
	Q_2	2	26	22.93	113.39
	Q_3	3	18	23.39	76.96
	Q_4	4	21	23.85	88.05
2001	Q_1	5	24	24.31	98.72
	Q_2	6	30	24.77	121.11
	Q_3	7	29	25.23	114.94
	Q_4	8	28	25.69	108.99
2002	Q_1	9	31	26.15	118.55
	Q_2	10	28	26.61	105.22
	Q_3	11	20	27.07	73.88
	Q_4	12	25	27.53	90.81

3- حساب المؤشرات الموسمية المعدلة (S%)، وفقاً إلى طريقة النسبة الى الاتجاه العام، على النحو الآتي:

أ- تنظيم النسب المئوية لكميات الانتاج مجردة من أثر الاتجاه العام، وايجاد متوسطات نسب الانتاج الفصلي، كما موضح بالجدول الآتي :

الفصول / السنوات	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	المجموع
2000	89.01	113.39	76.96	88.05	-
2001	98.72	121.11	114.94	108.99	-
2002	118.55	105.22	73.88	90.81	-
مجموع نسب الانتاج	306.55	339.72	265.78	287.85	-
متوسطات نسب الانتاج	102.09	113.24	88.59	95.95	399.87

ب- نقوم بتعديل متوسطات نسب الانتاج الفصلي، وفقاً للعلاقة الآتية:

المؤشر الموسمي المعدل (S%) = (متوسط الفصل / مجموع المتوسطات) *عدد الفصول* 100%

وبعد حساب المؤشرات الموسمية المعدلة (S%)، يتم تلخيصها بالجدول الاتي :

الفصول	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	المجموع
المؤشر الموسمي المعدل (S%)	102.12	113.28	88.62	95.98	400

4- ايجاد النسب الدورية، وفقاً للعلاقة الآتية:

$$\frac{Y}{T*S}*100\% = \frac{(S*C*I)\%}{S\%}*100\%$$

$$= (C * I) * 100\%$$

فعلى سبيل المثال، يتم حساب النسبة الدورية للفصل الاول (Q_1) لسنة (2000)، على النحو الآتي :

$$(C*I)*100\% = \frac{89.01}{102.12}*100\% = 87.16\%$$

وهكذا بالنسبة إلى بقية النسب الدورية، كما موضح بالجدول التالي، العمود رقم (5) :

(1) السنوات	(2) الفصول	(3) النسب المئوية لكميات الانتاج مجردة من أثر الاتجاه (S * C * I)%	(4) المؤشرات الموسمية المعدلة (S%)	(5)= (3÷4)* 100% النسب الدورية $\frac{(S*C*I)}{S\%}$ =(C*I)*100%
2000	Q_1	89.01	102.12	87.16
	Q_2	113.39	113.28	100.10
	Q_3	76.96	88.62	86.84
	Q_4	88.05	95.98	91.74
2001	Q_1	98.72	102.12	96.67
	Q_2	121.11	113.28	106.91
	Q_3	114.94	88.62	129.70
	Q_4	108.99	95.98	113.55
2002	Q_1	118.55	102.12	116.09
	Q_2	105.22	113.28	92.88
	Q_3	73.88	88.62	83.37
	Q_4	90.81	95.98	94.61

8-3-5: التغيرات غير المنتظمة: Irregular Variations

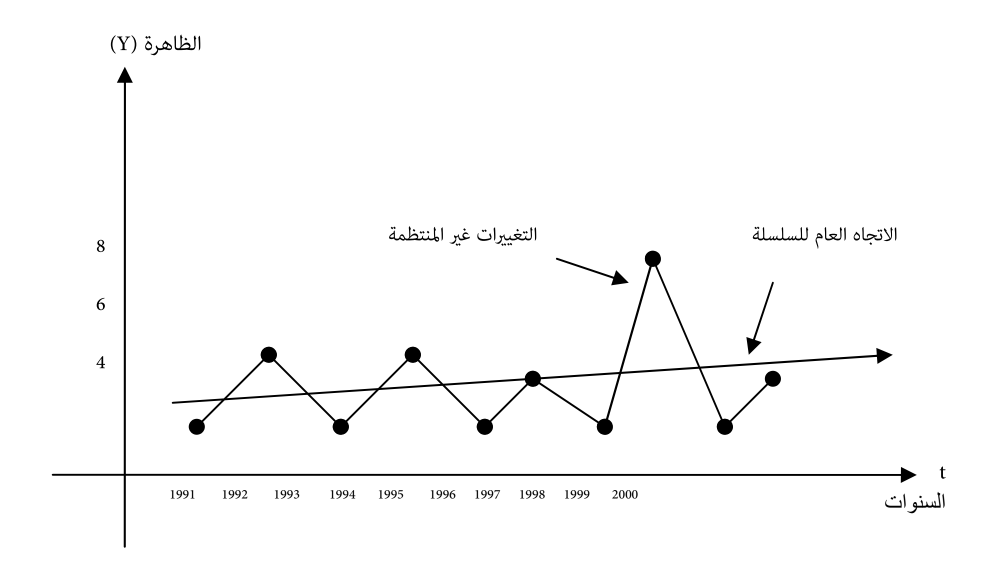
تُعرف التغيرات غير المنتظمة، بانها " التغيرات التي لا يمكن التحكم بها والسيطرة عليها، وعدم امكانية التنبؤ بها لفترات زمنية مستقبلية ".

ويُعد هذا النوع من التغيرات، من أبسط العوامل المؤثرة على السلسلة الزمنية، كونها أخطاءاً قد تحدث نتيجة تغيرات عرضية طفيفة لا يمكن التحكم في اسباب حدوثها.

تحدث التغيرات غير المنتظمة لاسباب لا يمكن التنبؤ بها بشكل دقيق، مثال ذلك الزلازل والبراكين أو الفيضانات والاعاصير أو الحرائق أو الحروب ... الخ، ويطلق على هذه التغيرات أحياناً بالتغيرات العشوائية او العرضية.

ولتقدير التغيرات غير المنتظمة (I)، ينبغي امكانية تقدير بقية مكونات السلسلة الزمنية المتمثلة بالتغيرات الاتجاهية (T) والفصلية (S) والدورية (C) .

والشكل التالي، يوضح طبيعة التغيرات غير المنتظمة للسلسلة الزمنية لظاهرة ما، خلال الفترة (1991 – 2000).



ولتقدير التغيرات غير المنتظمة (العشوائية)، نتبع الخطوات الاتية:

1- إستخدام النموذج الضربي ($Y= T * S * C * I$)، لوصف السلسلة الزمنية للظاهرة قيد الدرس.

2- تقدير معادلة خط الاتجاه العام للسلسلة الزمنية، وحساب القيم الاتجاهية التقديرية ($\hat{Y}$ T =).

3- حساب المؤشرات الموسمية المعدلة (S%) للسلسلة الزمنية.

4- تقدير النسب الدورية (C %) للسلسلة الزمنية.

5- حساب النسب غير المنتظمة (I %)، وفقاً للعلاقة الآتية :

$$I*100\% = \frac{Y}{T*S\%*C\%}*100\%$$

مثال (12):

البيانات التالية، تمثل قيمة المبيعات الفصلية (بالآف الدنانير) لاحدى السلع الكهربائية، خلال سنة (2004).

الفصول	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
المبيعات الفصلية (Y)	20	16	22	18

وتوفرت لديك المعلومات الآتية :

1- معادلة خط الاتجاه العام التقديرية [$\hat{Y}$ = 19].

2- المؤشرات الموسمية (S%) للفصول [S_1= 105.26% ، S_2 = 84.21% ، S_3 = 115.79% ، S_4 = 94.74%].

3- النسب الدورية (C%) للفصول [C_1 = 100.22% ، C_2 = 80.39% ، C_3 = 103.14% ، C_4 = 87.57%].

المطلوب:

حساب النسب غير المنتظمة (العشوائية) للفصول لسنة (2004)، مفترضا النموذج الضربي لوصف مشاهدات الفصول.

الحل:

لحساب النسب غير المنتظمة (العشوائية)، نقوم بتنظيم المعلومات السابقة في جدول، مع مراعاة استخدام العلاقة الآتية :

$$I*100\% = \frac{Y}{T*S\%*C\%}*100\%$$

فعلى سبيل المثال، يتم حساب النسبة غير المنتظمة للفصل الاول (Q_1)، كالآتي :

$$I * 100\% = \frac{20}{19\left(\frac{105.26}{100}\right)\left(\frac{100.22}{100}\right)}*100\% = 99.78\%$$

وبنفس الاسلوب يتم حساب بقية النسب غير المنتظمة للفصول الاخرى، كما موضح بالجدول التالي، العمود (6) :

(1) الفصول	(2) المبيعات الفصلية (Y)	(3) القيم الاتجاهية للمبيعات $T=\hat{Y}=19$	(4) المؤشرات الموسمية (S%)	(5) النسب الدورية (C%)	(6) = [2 ÷ (3*4*5)]* 100% النسب غير المنتظمة (العشوائية) $I\% = \frac{Y}{T*S\%*C\%}*100\%$
Q_1	20	19	105.26	100.22	99.78
Q_2	16	19	84.21	80.39	124.39
Q_3	22	19	115.79	103.14	96.96
Q_4	18	19	94.74	87.57	114.19

اسئلة عامة حول الفصل الثامن

س1: وضح المفاهيم التالية بالتفصيل :

1- السلسلة الزمنية، موضحاً أهم أهداف دراسة السلاسل الزمنية.
2- تحليل السلسلة الزمنية، ذاكراً نماذج وصف السلاسل الزمنية.
3- التغيرات الاتجاهية، موضحاً أهم طرق ايجاد معادلة خط الاتجاه العام.
4- التغيرات الفصلية، ذاكراً طرق تقدير المؤشرات الموسمية.
5- التغيرات الدورية، موضحاً اسلوب تقدير النسب الدورية.
6- التغيرات غير المنتظمة، موضحاً طريقة النسب غير المنتظمة (العشوائية).

س2: البيانات التالية، تمثل قيمة الاستيرادات (بالآف الدنانير) من السيارات اليابانية، لاحدى الدول العربية، خلال الفترة (1995 – 2003).

السنوات	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
قيمة الاستيرادات (Y)	300	370	220	310	260	290	310	400	600

المطلوب:

1- ايجاد معادلة خط الاتجاه العام، باستخدام طريقة التمهيد باليد.
2- ايجاد معادلة خط الاتجاه العام، باستخدام طريقة متوسطي نصفي السلسلة.
3- حساب المتوسطات المتحركة المركزية بطول (4) سنوات، مع رسم السلسلة والمتوسطات المتحركة بنفس الشكل.
4- ايجاد معادلة خط الاتجاه العام، باستخدام طريقة المربعات الصغرى.
5- التنبؤ بالاستيرادات $\left(\hat{Y}\right)$ لسنة (2006).
6- إستبعاد أثر الاتجاه العام من مشاهدات السلسلة الزمنية .

س3: البيانات الواردة بالجدول التالي، تمثل قيمة المشتريات الفصلية (بالآف الدنانير) من أجهـزة الحاسـوب لاحدى الجامعات العراقية، خلال الفترة (2000 – 2003).

الفصول / السنوات	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
2000	10	12	14	12
2001	13	11	12	15
2002	11	16	13	14
2003	16	18	20	17

المطلوب :

1- حساب المؤشرات الموسمية المعدلة (S%)، باستخدام:

أ- طريقة النسبة الى المتوسط المتحرك.

ب- طريقة النسبة الى الاتجاه العام.

2- إستبعاد أثر الموسم (التغير الفصلي) من مشاهدات الظاهرة (Y).

3- التنبؤ بقيم المشتريات الفصلية لسنة (2004).

س4: البيانات التالية، تمثل كميات الانتاج (الف قطعة) من البدلات الرجالية لاحد مصانع الالبسة الرجالية الجاهزة في الأردن، خلال الفترة (2001 – 2004).

المواسم / السنوات	الثلث الاول	الثلث الثاني	الثلث الثالث
2000	15	35	25
2001	17	36	27
2003	16	38	28
2004	20	35	23

المطلوب:

1- حساب القيم الاتجاهية للانتاج (T)، باستخدام طريقة المربعات الصغرى.
2- ايجاد المؤشرات الموسمية المعدلة (S%).
3- التنبؤ بكميات الانتاج لسنة (2005).
4- حساب النسب الدورية لكميات الانتاج (C%).

س5: البيانات الواردة بالجدول التالي، تمثل قيمة الصادرات الفصلية (بملايين الدنانير) من الفوسفات، لاحد المصانع في العراق، خلال الفترة (2000 – 2001).

الفصول / السنوات	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
2000	10	7	11	9
2001	11	10	12	10

وتوفرت لديك المعلومات الاتية:

1- معادلة خط الاتجاه العام للسلسلة $\left[T = \hat{Y} = 8.695 + 0.29t_i \right]$.
2- يُلخص الجدول التالي، المؤشرات الموسمية (S%) والنسب الدورية (C%) للسلسلة:

السنوات	**2000**				**2001**			
والفصول	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
المؤشرات الموسمية (S%)	109.86	85.65	113.44	91.05	109.86	85.65	113.44	91.05
النسب الدورية (C%)	101.19	83.73	103.82	104.16	97.32	102.18	98.96	89.73

المطلوب:

حساب النسب غير المنتظمة (العشوائية) للسلسلة، مفترضاً النموذج الضربي لوصف مشاهدات السلسلة الزمنية.

المصـــادر
References

اولاً: المصادر العربية :

1- ابو القاسم، علي، (1987)، "أساليب الاحصـاء التطبيقـي"، ط (1)، دار الشـباب للنشرـ والترجمـة والتوزيع، قبرص.
2- ابو صالح، محمد صبحي، (2000)، " الطرق الاحصـائية "، ط (1)، دار اليـازوري العلميـة للنشرـ والتوزيع، عمان.
3- ابو صالح، محمد صبحي، وعوض، عدنان محمـد، (2004)، " مقدمـة في الاحصـاء "، ط (1)، دار المسيرة للنشر والتوزيع والطباعة، عمان.
4- الأخرس، عـاطف وآخـرون، (2001)، " مبـادىء الاحصـاء "، ط (1)، دار البركـة للنشرـ والتوزيـع، عمان.
5- بري، عدنان بـن ماجـد وآخـرون ، (1994)، " مبـادىء الاحصـاء والاحـتمالات "، ط (1)، مطـابع جامعة الملك سعود، الرياض .
6- الراوي، خاشع وآخرون، (1982)، " مبادىء الاحصاء "، ط (1)، منشورات مطابع جامعـة بغـداد، بغداد.
7- العتوم، شفيق، (2006)، " طرق الاحصاء "، ط (1)، دار المناهج للنشر والتوزيع ، عمان.
8- القاضي، دلال وآخرون، (2005)، " الاحصاء: للاداريين والاقتصاديين "، ط (2)، دار الحامـد للنشرـ والتوزيع، عمان.
9- المشهداني، محمود حسن، وهرمز، أمير حنا، (1989)، " الاحصاء "، ط (1)، دار الحكمة ، جامعة بغداد ، بغداد.
10- منصور، عوض، وصبري، عزام، (2000)، " مبادىء الاحصاء "، ط (1)، دار صفاء للنشر والتوزيع ، عمان .

ثانياً: المصادر الاجنبية :

1- Berenson M., David L. and Timothy K., (2004), " Basic Business Statistics ", 9^{th} Edition, Prentice Hall.

2- Berenson M.L. and Levin D,M., (1996), "Basic Business Statistics: Concepts and Applications", 6^{th} Edition, Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall.

3- Bower man B.L. and O'Connell R,T., (1993), "Forecasting and Time Series: An Applied Approach", 3^{rd} Edition, Boston, Duxbury Press.

4- Conover W.J., (1980), "Practical Nonparametric Statistics", 2^{nd} Edition, John Wiley & Sons, New York.

5- Douglas C.M., (1997), " Design and Analysis of Experiments", 4^{th} Edition, John Wiley, New York.

6- Farnum N.R. and Stanton L.W., (1989), "Quantitative Forecasting Methods", Boston, PWS-Kent Publishing Co.

7- Freund J.E., Williams F.J. and Perles B.M., (1993), "Elementary Business Statistics", 6^{th} Edition, Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall.

8- Gibbons J.D., (1996), "Nonparametric Methods for Quantitative Analysis", 3^{rd} Edition, American Sciences Press, Syracuse, NY.

9- Gibbons J.D. and Chakraborti S., (1992), "Nonparametric Statistical Inference", 3^{rd} Edition, Marcel Dekker, New York.

10- Hogg R.V. and Tanis E.A., (1997), "Probability and statistical Inference", 5^{th} Edition, Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall.

11- Jerome L.M. and Arnold D.W., (1995), "Research Design and Statistical Analysis", Earlbaum Associates, Hillsdale, NJ.

12- John A.R., (1995), "Mathematical Statistics and Data Analysis", 2^{nd} Edition, Duxbury, Belmont, CA.

13- Johnson R. and Gouri B., (1987), "Statistics: Principles and Methods", 1^{st} Edition, John Wiley & Sons, Inc., New York.

14- Marjorie A.P., (1997), "Nonparametric Statistics for Health Care Research", Sage Publications Thousand Oaks, CA.

15- McClave J.T. and Benson P.G., (1994), "Statistics for Business and Economics", 6th Edition, Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall.

16- Mendenhall W. and Sincich T., (1996), "A second Course in Statistics: Regression Analysis", 5th Edition, Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall.

17- Mills T.C., (1990), "Time Series Techniques for Economists", Cambridge, Cambridge University press.

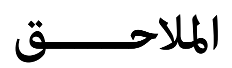
18- Richard J.L. and David S.R., (1998), "Statistics for Management". 7th Edition, Asimon & Schuster Co., Prentice Hall.

19- Richard J.L. and Morris L.M., (1986), "An Introduction to Mathematical Statistics and its Applications", 2nd Edition, Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall.

20- Ronald E,W., (1990), "Introduction to Statistics", 3rd Edition, Macmillan Publishing Co. Inc., New York.

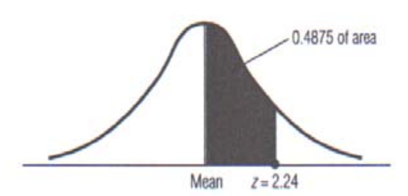
21- Rowntree D., (1984), " Probability", Charles Scribner's Sons, New York.

22- Wayne W.D., (1996), "Biostatistics: A Foundation for Analysis in the Health Sciences", 7th Edition, John Wiley & Sons, Inc., New York.



الملاحـــــق

ملحق رقم (1)



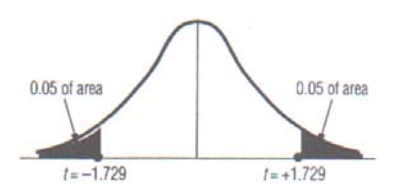
Appendix Table 1

Areas under the Standard Normal Probability Distribution between the Mean and Positive Values of z

Example: To find the area under the curve between the mean and a point 2.24 standard deviations to the right of the mean, look up the value opposite 2.2 and under 0.04 in the table: 0.4875 of the area under the curve lies between the mean and a **z** value of 2.24.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

ملحق رقم (2)



Appendix Table 2

Areas in Both Tails Combined for Student's *t* Distribution

Example: To find the value of *t* that corresponds to an area of 0.10 in both tails of the distribution combined, when there are 19 degrees of freedom, look under the 0.10 column, and proceed down to the 19 degrees of freedom row; the appropriate *t* value there is 1.729.

Degrees of Freedom	Area in Both Tails Combined			
	0.10	0.05	0.02	0.01
1	6.314	12.706	31.821	63.657
2	2.920	4.303	6.965	9.925
3	2.353	3.182	4.541	5.841
4	2.132	2.776	3.747	4.604
5	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.699	2.045	2.462	2.756
30	1.697	2.042	2.457	2.750
40	1.684	2.021	2.423	2.704
60	1.671	2.000	2.390	2.660
120	1.658	1.980	2.358	2.617
Normal Distribution	1.645	1.960	2.326	2.576

ملحق رقم (3)

Appendix Table 3 **Binomial Probabilities**

For a given combination of ***n*** and ***p***, entry indicates the probability of obtaining a specified value of ***r***. To locate entry: **when *p* ≤ 0.50,** read ***p*** across the top and both ***n*** and ***r*** down the left margin; **when *p* ≥ 0.50,** read ***p*** across the bottom and both ***n*** and ***r*** up the right margin.

		p																			
n	***r***	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**	**0.10**	**0.11**	**0.12**	**0.13**	**0.14**	**0.15**	**0.16**	**0.17**	**0.18**	***r***	***n***
2	0	0.9801	0.9604	0.9409	0.9216	0.9025	0.8836	0.8649	0.8464	0.8281	0.8100	0.7921	0.7744	0.7569	0.7396	0.7225	0.7056	0.6889	0.6724	2	
	1	0.0198	0.0392	0.0582	0.0768	0.0950	0.1128	0.1302	0.1472	0.1638	0.1800	0.1958	0.2112	0.2262	0.2408	0.2550	0.2688	0.2822	0.2952	1	
	2	0.0001	0.0004	0.0009	0.0016	0.0025	0.0036	0.0049	0.0064	0.0081	0.0100	0.0121	0.0144	0.0169	0.0196	0.0225	0.0256	0.0289	0.0324	0	2
3	0	0.9703	0.9412	0.9127	0.8847	0.8574	0.8306	0.8044	0.7787	0.7536	0.7290	0.7050	0.6815	0.6585	0.6361	0.6141	0.5927	0.5718	0.5514	3	
	1	0.0294	0.0576	0.0847	0.1106	0.1354	0.1590	0.1816	0.2031	0.2236	0.2430	0.2614	0.2788	0.2952	0.3106	0.3251	0.3387	0.3513	0.3631	2	
	2	0.0003	0.0012	0.0026	0.0046	0.0071	0.0102	0.0137	0.0177	0.0221	0.0270	0.0323	0.0380	0.0441	0.0506	0.0574	0.0645	0.0720	0.0797	1	
	3	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0002	0.0003	0.0005	0.0007	0.0010	0.0013	0.0017	0.0022	0.0027	0.0034	0.0041	0.0049	0.0058	0	3
4	0	0.9606	0.9224	0.8853	0.8493	0.8145	0.7807	0.7481	0.7164	0.6857	0.6561	0.6274	0.5997	0.5729	0.5470	0.5220	0.4979	0.4746	0.4521	4	
	1	0.0388	0.0753	0.1095	0.1416	0.1715	0.1993	0.2252	0.2492	0.2713	0.2916	0.3102	0.3271	0.3424	0.3562	0.3685	0.3793	0.3888	0.3970	3	
	2	0.0006	0.0023	0.0051	0.0088	0.0135	0.0191	0.0254	0.0325	0.0402	0.0486	0.0575	0.0669	0.0767	0.0870	0.0975	0.1084	0.1195	0.1307	2	
	3	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0005	0.0008	0.0013	0.0019	0.0027	0.0036	0.0047	0.0061	0.0076	0.0094	0.0115	0.0138	0.0163	0.0191	1	
	4	—	—	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0007	0.0008	0.0010	0	4
5	0	0.9510	0.9039	0.8587	0.8154	0.7738	0.7339	0.6957	0.6591	0.6240	0.5905	0.5584	0.5277	0.4984	0.4704	0.4437	0.4182	0.3939	0.3707	5	
	1	0.0480	0.0922	0.1328	0.1699	0.2036	0.2342	0.2618	0.2866	0.3086	0.3280	0.3451	0.3598	0.3724	0.3829	0.3915	0.3983	0.4034	0.4069	4	
	2	0.0010	0.0038	0.0082	0.0142	0.0214	0.0299	0.0394	0.0498	0.0610	0.0729	0.0853	0.0981	0.1113	0.1247	0.1382	0.1517	0.1652	0.1786	3	
	3	0.0000	0.0001	0.0003	0.0006	0.0011	0.0019	0.0030	0.0043	0.0060	0.0081	0.0105	0.0134	0.0166	0.0203	0.0244	0.0289	0.0338	0.0392	2	
	4	—	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0002	0.0003	0.0004	0.0007	0.0009	0.0012	0.0017	0.0022	0.0028	0.0035	0.0043	1	
	5	—	—	—	—	—	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0	5
6	0	0.9415	0.8858	0.8330	0.7828	0.7351	0.6899	0.6470	0.6064	0.5679	0.5314	0.4970	0.4644	0.4336	0.4046	0.3771	0.3513	0.3269	0.3040	6	
	1	0.0571	0.1085	0.1546	0.1957	0.2321	0.2642	0.2922	0.3164	0.3370	0.3543	0.3685	0.3800	0.3888	0.3952	0.3993	0.4015	0.4018	0.4004	5	
	2	0.0014	0.0055	0.0120	0.0204	0.0305	0.0422	0.0550	0.0688	0.0833	0.0984	0.1139	0.1295	0.1452	0.1608	0.1762	0.1912	0.2057	0.2197	4	
	3	0.0000	0.0002	0.0005	0.0011	0.0021	0.0036	0.0055	0.0080	0.0110	0.0146	0.0188	0.0236	0.0289	0.0349	0.0415	0.0486	0.0562	0.0643	3	
	4	—	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0003	0.0005	0.0008	0.0012	0.0017	0.0024	0.0032	0.0043	0.0055	0.0069	0.0086	0.0106	2	
	5	—	—	—	—	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0007	0.0009	1	
	6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0	6
7	0	0.9321	0.8681	0.8080	0.7514	0.6983	0.6485	0.6017	0.5578	0.5168	0.4783	0.4423	0.4087	0.3773	0.3479	0.3206	0.2951	0.2714	0.2493	7	
	1	0.0659	0.1240	0.1749	0.2192	0.2573	0.2897	0.3170	0.3396	0.3578	0.3720	0.3827	0.3901	0.3946	0.3965	0.3960	0.3935	0.3891	0.3830	6	
	2	0.0020	0.0076	0.0162	0.0274	0.0406	0.0555	0.0716	0.0886	0.1061	0.1240	0.1419	0.1596	0.1769	0.1936	0.2097	0.2248	0.2391	0.2523	5	
	3	0.0000	0.0003	0.0008	0.0019	0.0036	0.0059	0.0090	0.0128	0.0175	0.0230	0.0292	0.0363	0.0441	0.0525	0.0617	0.0714	0.0816	0.0923	4	
	4	—	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0004	0.0007	0.0011	0.0017	0.0026	0.0036	0.0049	0.0066	0.0086	0.0109	0.0136	0.0167	0.0203	3	
	5	—	—	—	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0002	0.0003	0.0004	0.0006	0.0008	0.0012	0.0016	0.0021	0.0027	2	
	6	—	—	—	—	—	—	—	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	1	
	7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0	7
n	***r***	**0.99**	**0.98**	**0.97**	**0.96**	**0.95**	**0.94**	**0.93**	**0.92**	**0.91**	**0.90**	**0.89**	**0.88**	**0.87**	**0.86**	**0.85**	**0.84**	**0.83**	**0.82**	***r***	***n***
		p																			

تابع ملحق رقم (3)

n	r	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.10	0.11	0.12	0.13	0.14	0.15	0.16	0.17	0.18	r	n
		P																			
8	0	0.9227	0.8508	0.7837	0.7214	0.6634	0.6096	0.5596	0.5132	0.4703	0.4305	0.3937	0.3596	0.3282	0.2992	0.2725	0.2479	0.2252	0.2044	8	
	1	0.0746	0.1389	0.1939	0.2405	0.2793	0.3113	0.3370	0.3570	0.3721	0.3826	0.3892	0.3923	0.3923	0.3897	0.3847	0.3777	0.3691	0.3590	7	
	2	0.0026	0.0099	0.0210	0.0351	0.0515	0.0695	0.0888	0.1087	0.1288	0.1488	0.1684	0.1872	0.2052	0.2220	0.2376	0.2518	0.2646	0.2758	6	
	3	0.0001	0.0004	0.0013	0.0029	0.0054	0.0089	0.0134	0.0189	0.0255	0.0331	0.0416	0.0511	0.0613	0.0723	0.0839	0.0959	0.1084	0.1211	5	
	4	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0004	0.0007	0.0013	0.0021	0.0031	0.0046	0.0064	0.0087	0.0115	0.0147	0.0185	0.0228	0.0277	0.0332	4	
	5	—	—	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0002	0.0004	0.0006	0.0009	0.0014	0.0019	0.0026	0.0035	0.0045	0.0058	3	
	6	—	—	—	—	—	—	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0005	0.0006	2	
	7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1	
	8	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0	8
9	0	0.9135	0.8337	0.7602	0.6925	0.6302	0.5730	0.5204	0.4722	0.4279	0.3874	0.3504	0.3165	0.2855	0.2573	0.2316	0.2082	0.1869	0.1676	9	
	1	0.0830	0.1531	0.2116	0.2597	0.2985	0.3292	0.3525	0.3695	0.3809	0.3874	0.3897	0.3884	0.3840	0.3770	0.3679	0.3569	0.3446	0.3312	8	
	2	0.0034	0.0125	0.0262	0.0433	0.0629	0.0840	0.1061	0.1285	0.1507	0.1722	0.1927	0.2119	0.2295	0.2455	0.2597	0.2720	0.2823	0.2908	7	
	3	0.0001	0.0006	0.0019	0.0042	0.0077	0.0125	0.0186	0.0261	0.0348	0.0446	0.0556	0.0674	0.0800	0.0933	0.1069	0.1209	0.1349	0.1489	6	
	4	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0006	0.0012	0.0021	0.0034	0.0052	0.0074	0.0103	0.0138	0.0179	0.0228	0.0283	0.0345	0.0415	0.0490	5	
	5	—	—	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0003	0.0005	0.0008	0.0013	0.0019	0.0027	0.0037	0.0050	0.0066	0.0085	0.0108	4	
	6	—	—	—	—	—	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0002	0.0003	0.0004	0.0006	0.0008	0.0012	0.0016	3	
	7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	2	
	8	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.0000	0.0000	0.0000	1	
	9	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0	9
10	0	0.9044	0.8171	0.7374	0.6648	0.5987	0.5386	0.4840	0.4344	0.3894	0.3487	0.3118	0.2785	0.2484	0.2213	0.1969	0.1749	0.1552	0.1374	10	
	1	0.0914	0.1667	0.2281	0.2770	0.3151	0.3438	0.3643	0.3777	0.3851	0.3874	0.3854	0.3798	0.3712	0.3603	0.3474	0.3331	0.3178	0.3017	9	
	2	0.0042	0.0153	0.0317	0.0519	0.0746	0.0988	0.1234	0.1478	0.1714	0.1937	0.2143	0.2330	0.2496	0.2639	0.2759	0.2856	0.2929	0.2980	8	
	3	0.0001	0.0008	0.0026	0.0058	0.0105	0.0168	0.0248	0.0343	0.0452	0.0574	0.0706	0.0847	0.0995	0.1146	0.1298	0.1450	0.1600	0.1745	7	
	4	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0010	0.0019	0.0033	0.0052	0.0078	0.0112	0.0153	0.0202	0.0260	0.0326	0.0401	0.0483	0.0573	0.0670	6	
	5	—	—	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0003	0.0005	0.0009	0.0015	0.0023	0.0033	0.0047	0.0064	0.0085	0.0111	0.0141	0.0177	5	
	6	—	—	—	—	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0002	0.0004	0.0006	0.0009	0.0012	1.0018	0.0024	0.0032	4	
	7	—	—	—	—	—	—	—	—	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0002	0.0003	0.0004	3	
	8	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	2	
	9	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	
	10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0	10
n	r	0.99	0.98	0.97	0.96	0.95	0.94	0.93	0.92	0.91	0.90	0.89	0.88	0.87	0.86	0.85	0.84	0.83	0.82	r	n
		P																			

تابع ملحق رقم (3)

n	r	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.10	0.11	0.12	0.13	0.14	0.15	0.16	0.17	0.18	r	n
		P																			
12	0	0.8864	0.7847	0.6938	0.6127	0.5404	0.4759	0.4186	0.3677	0.3225	0.2824	0.2470	0.2157	0.1880	0.1637	0.1422	0.1234	0.1069	0.0924	12	
	1	0.1074	0.1922	0.2575	0.3064	0.3413	0.3645	0.3781	0.3837	0.3827	0.3766	0.3663	0.3529	0.3372	0.3197	0.3012	0.2821	0.2627	0.2434	11	
	2	0.0060	0.0216	0.0438	0.0702	0.0988	0.1280	0.1565	0.1835	0.2082	0.2301	0.2490	0.2647	0.2771	0.2863	0.2924	0.2955	0.2960	0.2939	10	
	3	0.0002	0.0015	0.0045	0.0098	0.0173	0.0272	0.0393	0.0532	0.0686	0.0852	0.1026	0.1203	0.1380	0.1553	0.1720	0.1876	0.2021	0.2151	9	
	4	0.0000	0.0001	0.0003	0.0009	0.0021	0.0039	0.0067	0.0104	0.0153	0.0213	0.0285	0.0369	0.0464	0.0569	0.0683	0.0804	0.0931	0.1062	8	
	5	—	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0004	0.0008	0.0014	0.0024	0.0038	0.0056	0.0081	0.0111	0.0148	0.0193	0.0245	0.0305	0.0373	7	
	6	—	—	—	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0003	0.0005	0.0008	0.0013	0.0019	0.0028	0.0040	0.0054	0.0073	0.0096	6	
	7	—	—	—	—	—	—	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0002	0.0004	0.0006	0.0009	0.0013	0.0018	5	
	8	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	4	
	9	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	3	
	10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	
	11	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	
	12	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0	12
15	0	0.8601	0.7386	0.6333	0.5421	0.4633	0.3953	0.3367	0.2863	0.2430	0.2059	0.1741	0.1470	0.1238	0.1041	0.0874	0.0731	0.0611	0.0510	15	
	1	0.1303	0.2261	0.2938	0.3388	0.3658	0.3785	0.3801	0.3734	0.3605	0.3432	0.3228	0.3006	0.2775	0.2542	0.2312	0.2090	0.1878	0.1678	14	
	2	0.0092	0.0323	0.0636	0.0988	0.1348	0.1691	0.2003	0.2273	0.2496	0.2669	0.2793	0.2870	0.2903	0.2897	0.2856	0.2787	0.2692	0.2578	13	
	3	0.0004	0.0029	0.0085	0.0178	0.0307	0.0468	0.0653	0.0857	0.1070	0.1285	0.1496	0.1696	0.1880	0.2044	0.2184	0.2300	0.2389	0.2452	12	
	4	0.0000	0.0002	0.0008	0.0022	0.0049	0.0090	0.0148	0.0223	0.0317	0.0428	0.0555	0.0694	0.0843	0.0998	0.1156	0.1314	0.1468	0.1615	11	
	5	—	0.0000	0.0001	0.0002	0.0006	0.0013	0.0024	0.0043	0.0069	0.0105	0.0151	0.0208	0.0277	0.0357	0.0449	0.0551	0.0662	0.0780	10	
	6	—	—	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0006	0.0011	0.0019	0.0031	0.0047	0.0069	0.0097	0.0132	0.0175	0.0226	0.0285	9	
	7	—	—	—	—	—	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0003	0.0005	0.0008	0.0013	0.0020	0.0030	0.0043	0.0059	0.0081	8	
	8	—	—	—	—	—	—	—	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0002	0.0003	0.0005	0.0008	0.0012	0.0018	7	
	9	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0002	0.0003	6	
	10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	5	
	11	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	4	
	12	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3	
	13	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	
	14	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	
	15	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0	15
20	0	0.8179	0.6676	0.5438	0.4420	0.3585	0.2901	0.2342	0.1887	0.1516	0.1216	0.0972	0.0776	0.0617	0.0490	0.0388	0.0306	0.0241	0.0189	20	
	1	0.1652	0.2725	0.3364	0.3683	0.3774	0.3703	0.3526	0.3282	0.3000	0.2702	0.2403	0.2115	0.1844	0.1595	0.1368	0.1165	0.0986	0.0829	19	
	2	0.0159	0.0528	0.0988	0.1458	0.1887	0.2246	0.2521	0.2711	0.2818	0.2852	0.2822	0.2740	0.2618	0.2466	0.2293	0.2109	0.1919	0.1730	18	
	3	0.0010	0.0065	0.0183	0.0364	0.0596	0.0860	0.1139	0.1414	0.1672	0.1901	0.2093	0.2242	0.2347	0.2409	0.2428	0.2410	0.2358	0.2278	17	
	4	0.0000	0.0006	0.0024	0.0065	0.0133	0.0233	0.0364	0.0523	0.0703	0.0898	0.1099	0.1299	0.1491	0.1666	0.1821	0.1951	0.2053	0.2125	16	
	5	—	0.0000	0.0002	0.0009	0.0022	0.0048	0.0088	0.0145	0.0222	0.0319	0.0435	0.0567	0.0713	0.0868	0.1028	0.1189	0.1345	0.1493	15	
	6	—	—	0.0000	0.0001	0.0003	0.0008	0.0017	0.0032	0.0055	0.0089	0.0134	0.0193	0.0266	0.0353	0.0454	0.0566	0.0689	0.0819	14	
	7	—	—	—	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0005	0.0011	0.0020	0.0033	0.0053	0.0080	0.0115	0.0160	0.0216	0.0282	0.0360	13	
	8	—	—	—	—	—	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0004	0.0007	0.0012	0.0019	0.0030	0.0046	0.0067	0.0094	0.0128	12	
	9	—	—	—	—	—	—	—	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0002	0.0004	0.0007	0.0011	0.0017	0.0026	0.0038	11	
	10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0002	0.0004	0.0006	0.0009	10	
	11	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0002	9	
	12	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.0000	0.0000	0.0000	8	
	13	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	7	
	14	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	6	
	15	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	5	
	16	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	4	
	17	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3	
	18	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	
	19	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	
	20	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0	20
n	r	0.99	0.98	0.97	0.96	0.95	0.94	0.93	0.92	0.91	0.90	0.89	0.88	0.87	0.86	0.85	0.84	0.83	0.82	r	n
		P																			

تابع ملحق رقم (3)

n	r	0.19	0.20	0.21	0.22	0.23	0.24	0.25	0.26	0.27	0.28	0.29	0.30	0.31	0.32	0.33	0.34	0.35	0.36	r	n
2	0	0.6561	0.6400	0.6241	0.6084	0.5929	0.5776	0.5625	0.5476	0.5329	0.5184	0.5041	0.4900	0.4761	0.4624	0.4489	0.4356	0.4225	0.4096	2	
	1	0.3078	0.3200	0.3318	0.3432	0.3542	0.3648	0.3750	0.3848	0.3942	0.4032	0.4118	0.4200	0.4278	0.4352	0.4422	0.4488	0.4550	0.4608	1	
	2	0.0361	0.0400	0.0441	0.0484	0.0529	0.0576	0.0625	0.0676	0.0729	0.0784	0.0841	0.0900	0.0961	0.1024	0.1089	0.1156	0.1225	0.1296	0	2
3	0	0.5314	0.5120	0.4930	0.4746	0.4565	0.4390	0.4219	0.4052	0.3890	0.3732	0.3579	0.3430	0.3285	0.3144	0.3008	0.2875	0.2746	0.2621	3	
	1	0.3740	0.3840	0.3932	0.4015	0.4091	0.4159	0.4219	0.4271	0.4316	0.4355	0.4386	0.4410	0.4428	0.4439	0.4444	0.4443	0.4436	0.4424	2	
	2	0.0877	0.0960	0.1045	0.1133	0.1222	0.1313	0.1406	0.1501	0.1597	0.1693	0.1791	0.1890	0.1989	0.2089	0.2189	0.2289	0.2389	0.2488	1	
	3	0.0069	0.0080	0.0093	0.0106	0.0122	0.0138	0.0156	0.0176	0.0197	0.0220	0.0244	0.0270	0.0298	0.0328	0.0359	0.0393	0.0429	0.0467	0	3
4	0	0.4305	0.4096	0.3895	0.3702	0.3515	0.3336	0.3164	0.2999	0.2840	0.2687	0.2541	0.2401	0.2267	0.2138	0.2015	0.1897	0.1785	0.1678	4	
	1	0.4039	0.4096	0.4142	0.4176	0.4200	0.4214	0.4219	0.4214	0.4201	0.4180	0.4152	0.4116	0.4074	0.4025	0.3970	0.3910	0.3845	0.3775	3	
	2	0.1421	0.1536	0.1651	0.1767	0.1882	0.1996	0.2109	0.2221	0.2331	0.2439	0.2544	0.2646	0.2745	0.2841	0.2933	0.3021	0.3105	0.3185	2	
	3	0.0222	0.0256	0.0293	0.0332	0.0375	0.0420	0.0469	0.0520	0.0575	0.0632	0.0693	0.0756	0.0822	0.0891	0.0963	0.1038	0.1115	0.1194	1	
	4	0.0013	0.0016	0.0019	0.0023	0.0028	0.0033	0.0039	0.0046	0.0053	0.0061	0.0071	0.0081	0.0092	0.0105	0.0119	0.0134	0.0150	0.0168	0	4
5	0	0.3487	0.3277	0.3077	0.2887	0.2707	0.2536	0.2373	0.2219	0.2073	0.1935	0.1804	0.1681	0.1564	0.1454	0.1350	0.1252	0.1160	0.1074	5	
	1	0.4089	0.4096	0.4090	0.4072	0.4043	0.4003	0.3955	0.3898	0.3834	0.3762	0.3685	0.3601	0.3513	0.3421	0.3325	0.3226	0.3124	0.3020	4	
	2	0.1919	0.2048	0.2174	0.2297	0.2415	0.2529	0.2637	0.2739	0.2836	0.2926	0.3010	0.3087	0.3157	0.3220	0.3275	0.3323	0.3364	0.3397	3	
	3	0.0450	0.0512	0.0578	0.0648	0.0721	0.0798	0.0879	0.0962	0.1049	0.1138	0.1229	0.1323	0.1418	0.1515	0.1613	0.1712	0.1811	0.1911	2	
	4	0.0053	0.0064	0.0077	0.0091	0.0108	0.0126	0.0146	0.0169	0.0194	0.0221	0.0251	0.0283	0.0319	0.0357	0.0397	0.0441	0.0488	0.0537	1	
	5	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0008	0.0010	0.0012	0.0014	0.0017	0.0021	0.0024	0.0029	0.0034	0.0039	0.0045	0.0053	0.0060	0	5
6	0	0.2824	0.2621	0.2431	0.2252	0.2084	0.1927	0.1780	0.1642	0.1513	0.1393	0.1281	0.1176	0.1079	0.0989	0.0905	0.0827	0.0754	0.0687	6	
	1	0.3975	0.3932	0.3877	0.3811	0.3735	0.3651	0.3560	0.3462	0.3358	0.3251	0.3139	0.3025	0.2909	0.2792	0.2673	0.2555	0.2437	0.2319	5	
	2	0.2331	0.2458	0.2577	0.2687	0.2789	0.2882	0.2966	0.3041	0.3105	0.3160	0.3206	0.3241	0.3267	0.3284	0.3292	0.3290	0.3280	0.3261	4	
	3	0.0729	0.0819	0.0913	0.1011	0.1111	0.1214	0.1318	0.1424	0.1531	0.1639	0.1746	0.1852	0.1957	0.2061	0.2162	0.2260	0.2355	0.2446	3	
	4	0.0128	0.0154	0.0182	0.0214	0.0249	0.0287	0.0330	0.0375	0.0425	0.0478	0.0535	0.0595	0.0660	0.0727	0.0799	0.0873	0.0951	0.1032	2	
	5	0.0012	0.0015	0.0019	0.0024	0.0030	0.0036	0.0044	0.0053	0.0063	0.0074	0.0087	0.0102	0.0119	0.0137	0.0157	0.0180	0.0205	0.0232	1	
	6	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0007	0.0009	0.0011	0.0013	0.0015	0.0018	0.0022	0	6
7	0	0.2288	0.2097	0.1920	0.1757	0.1605	0.1465	0.1335	0.1215	0.1105	0.1003	0.0910	0.0824	0.0745	0.0672	0.0606	0.0546	0.0490	0.0440	7	
	1	0.3756	0.3670	0.3573	0.3468	0.3356	0.3237	0.3115	0.2989	0.2860	0.2731	0.2600	0.2471	0.2342	0.2215	0.2090	0.1967	0.1848	0.1732	6	
	2	0.2643	0.2753	0.2850	0.2935	0.3007	0.3067	0.3115	0.3150	0.3174	0.3186	0.3186	0.3177	0.3156	0.3127	0.3088	0.3040	0.2985	0.2922	5	
	3	0.1033	0.1147	0.1263	0.1379	0.1497	0.1614	0.1730	0.1845	0.1956	0.2065	0.2169	0.2269	0.2363	0.2452	0.2535	0.2610	0.2679	0.2740	4	
	4	0.0242	0.0287	0.0336	0.0389	0.0447	0.0510	0.0577	0.0648	0.0724	0.0803	0.0886	0.0972	0.1062	0.1154	0.1248	0.1345	0.1442	0.1541	3	
	5	0.0034	0.0043	0.0054	0.0066	0.0080	0.0097	0.0115	0.0137	0.0161	0.0187	0.0217	0.0250	0.0286	0.0326	0.0369	0.0416	0.0466	0.0520	2	
	6	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0008	0.0010	0.0013	0.0016	0.0020	0.0024	0.0030	0.0036	0.0043	0.0051	0.0061	0.0071	0.0084	0.0098	1	
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0008	0	7
n	r	0.81	0.80	0.79	0.78	0.77	0.76	0.75	0.74	0.73	0.72	0.71	0.70	0.69	0.68	0.67	0.66	0.65	0.64	r	n

(Column headers in both the top and bottom header rows are values of p.)

تابع ملحق رقم (3)

A-7

n	r	0.19	0.20	0.21	0.22	0.23	0.24	0.25	0.26	0.27	0.28	0.29	0.30	0.31	0.32	0.33	0.34	0.35	0.36	r	n
8	0	0.1853	0.1678	0.1517	0.1370	0.1236	0.1113	0.1001	0.0899	0.0806	0.0722	0.0646	0.0576	0.0514	0.0457	0.0406	0.0360	0.0319	0.0281	8	
	1	0.3477	0.3355	0.3226	0.3092	0.2953	0.2812	0.2670	0.2527	0.2386	0.2247	0.2110	0.1977	0.1847	0.1721	0.1600	0.1484	0.1373	0.1267	7	
	2	0.2855	0.2936	0.3002	0.3052	0.3087	0.3108	0.3115	0.3108	0.3089	0.3058	0.3017	0.2965	0.2904	0.2835	0.2758	0.2675	0.2587	0.2494	6	
	3	0.1339	0.1468	0.1596	0.1722	0.1844	0.1963	0.2076	0.2184	0.2285	0.2379	0.2464	0.2541	0.2609	0.2668	0.2717	0.2756	0.2786	0.2805	5	
	4	0.0393	0.0459	0.0530	0.0607	0.0689	0.0775	0.0865	0.0959	0.1056	0.1156	0.1258	0.1361	0.1465	0.1569	0.1673	0.1775	0.1875	0.1973	4	
	5	0.0074	0.0092	0.0113	0.0137	0.0165	0.0196	0.0231	0.0270	0.0313	0.0360	0.0411	0.0467	0.0527	0.0591	0.0659	0.0732	0.0808	0.0888	3	
	6	0.0009	0.0011	0.0015	0.0019	0.0025	0.0031	0.0038	0.0047	0.0058	0.0070	0.0084	0.0100	0.0118	0.0139	0.0162	0.0188	0.0217	0.0250	2	
	7	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0008	0.0010	0.0012	0.0015	0.0019	0.0023	0.0028	0.0033	0.0040	1	
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0	8
9	0	0.1501	0.1342	0.1199	0.1069	0.0952	0.0846	0.0751	0.0665	0.0589	0.0520	0.0458	0.0404	0.0355	0.0311	0.0272	0.0238	0.0207	0.0180	9	
	1	0.3169	0.3020	0.2867	0.2713	0.2558	0.2404	0.2253	0.2104	0.1960	0.1820	0.1685	0.1556	0.1433	0.1317	0.1206	0.1102	0.1004	0.0912	8	
	2	0.2973	0.3020	0.3049	0.3061	0.3056	0.3037	0.3003	0.2957	0.2899	0.2831	0.2754	0.2668	0.2576	0.2478	0.2376	0.2270	0.2162	0.2052	7	
	3	0.1627	0.1762	0.1891	0.2014	0.2130	0.2238	0.2336	0.2424	0.2502	0.2569	0.2624	0.2668	0.2701	0.2721	0.2731	0.2729	0.2716	0.2693	6	
	4	0.0573	0.0661	0.0754	0.0852	0.0954	0.1060	0.1168	0.1278	0.1388	0.1499	0.1608	0.1715	0.1820	0.1921	0.2017	0.2109	0.2194	0.2272	5	
	5	0.0134	0.0165	0.0200	0.0240	0.0285	0.0335	0.0389	0.0449	0.0513	0.0583	0.0657	0.0735	0.0818	0.0904	0.0994	0.1086	0.1181	0.1278	4	
	6	0.0021	0.0028	0.0036	0.0045	0.0057	0.0070	0.0087	0.0105	0.0127	0.0151	0.0179	0.0210	0.0245	0.0284	0.0326	0.0373	0.0424	0.0479	3	
	7	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0007	0.0010	0.0012	0.0016	0.0020	0.0025	0.0031	0.0039	0.0047	0.0057	0.0069	0.0082	0.0098	0.0116	2	
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0007	0.0008	0.0011	0.0013	0.0016	1	
	9	—	—	—	—	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0	9
10	0	0.1216	0.1074	0.0947	0.0834	0.0733	0.0643	0.0563	0.0492	0.0430	0.0374	0.0326	0.0282	0.0245	0.0211	0.0182	0.0157	0.0135	0.0115	10	
	1	0.2852	0.2684	0.2517	0.2351	0.2188	0.2030	0.1877	0.1730	0.1590	0.1456	0.1330	0.1211	0.1099	0.0995	0.0898	0.0808	0.0725	0.0649	9	
	2	0.3010	0.3020	0.3011	0.2984	0.2942	0.2885	0.2816	0.2735	0.2646	0.2548	0.2444	0.2335	0.2222	0.2107	0.1990	0.1873	0.1757	0.1642	8	
	3	0.1883	0.2013	0.2134	0.2244	0.2343	0.2429	0.2503	0.2563	0.2609	0.2642	0.2662	0.2668	0.2662	0.2644	0.2614	0.2573	0.2522	0.2462	7	
	4	0.0773	0.0881	0.0993	0.1108	0.1225	0.1343	0.1460	0.1576	0.1689	0.1798	0.1903	0.2001	0.2093	0.2177	0.2253	0.2320	0.2377	0.2424	6	
	5	0.0218	0.0264	0.0317	0.0375	0.0439	0.0509	0.0584	0.0664	0.0750	0.0839	0.0933	0.1029	0.1128	0.1229	0.1332	0.1434	0.1536	0.1636	5	
	6	0.0043	0.0055	0.0070	0.0088	0.0109	0.0134	0.0162	0.0195	0.0231	0.0272	0.0317	0.0368	0.0422	0.0482	0.0547	0.0616	0.0689	0.0767	4	
	7	0.0006	0.0008	0.0011	0.0014	0.0019	0.0024	0.0031	0.0039	0.0049	0.0060	0.0074	0.0090	0.0108	0.0130	0.0154	0.0181	0.0212	0.0247	3	
	8	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0007	0.0009	0.0011	0.0014	0.0018	0.0023	0.0028	0.0035	0.0043	0.0052	2	
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	1	
	10	—	—	—	—	—	—	—	—	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0	10
12	0	0.0798	0.0687	0.0591	0.0507	0.0434	0.0371	0.0317	0.0270	0.0229	0.0194	0.0164	0.0138	0.0116	0.0098	0.0082	0.0068	0.0057	0.0047	12	
	1	0.2245	0.2062	0.1885	0.1717	0.1557	0.1407	0.1267	0.1137	0.1016	0.0906	0.0804	0.0712	0.0628	0.0552	0.0484	0.0422	0.0368	0.0319	11	
	2	0.2897	0.2835	0.2756	0.2663	0.2558	0.2444	0.2323	0.2197	0.2068	0.1937	0.1807	0.1678	0.1552	0.1429	0.1310	0.1197	0.1088	0.0986	10	
	3	0.2265	0.2362	0.2442	0.2503	0.2547	0.2573	0.2581	0.2573	0.2549	0.2511	0.2460	0.2397	0.2324	0.2241	0.2151	0.2055	0.1954	0.1849	9	
	4	0.1195	0.1329	0.1460	0.1589	0.1712	0.1828	0.1936	0.2034	0.2122	0.2197	0.2261	0.2311	0.2349	0.2373	0.2384	0.2382	0.2367	0.2340	8	
	5	0.0449	0.0532	0.0621	0.0717	0.0818	0.0924	0.1032	0.1143	0.1255	0.1367	0.1477	0.1585	0.1688	0.1787	0.1879	0.1963	0.2039	0.2106	7	
	6	0.0123	0.0155	0.0193	0.0236	0.0285	0.0340	0.0401	0.0469	0.0542	0.0620	0.0704	0.0792	0.0885	0.0981	0.1079	0.1180	0.1281	0.1382	6	
	7	0.0025	0.0033	0.0044	0.0057	0.0073	0.0092	0.0115	0.0141	0.0172	0.0207	0.0246	0.0291	0.0341	0.0396	0.0456	0.0521	0.0591	0.0666	5	
	8	0.0004	0.0005	0.0007	0.0010	0.0014	0.0018	0.0024	0.0031	0.0040	0.0050	0.0063	0.0078	0.0096	0.0116	0.0140	0.0168	0.0199	0.0234	4	
	9	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0007	0.0009	0.0011	0.0015	0.0019	0.0024	0.0031	0.0038	0.0048	0.0059	3	
	10	—	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0003	0.0003	0.0005	0.0006	0.0008	0.0010	2	
	11	—	—	—	—	—	—	—	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	1	
	12	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.0000	0.0000	0.0000	0	12
n	r	0.81	0.80	0.79	0.78	0.77	0.76	0.75	0.74	0.73	0.72	0.71	0.70	0.69	0.68	0.67	0.66	0.65	0.64	r	n

تابع ملحق رقم (3)

n	r	0.19	0.20	0.21	0.22	0.23	0.24	0.25	0.26	0.27	0.28	0.29	0.30	0.31	0.32	0.33	0.34	0.35	0.36	r	n
15	0	0.0424	0.0352	0.0291	0.0241	0.0198	0.0163	0.0134	0.0109	0.0089	0.0072	0.0059	0.0047	0.0038	0.0031	0.0025	0.0020	0.0016	0.0012	15	
	1	0.1492	0.1319	0.1162	0.1018	0.0889	0.0772	0.0668	0.0576	0.0494	0.0423	0.0360	0.0305	0.0258	0.0217	0.0182	0.0152	0.0126	0.0104	14	
	2	0.2449	0.2309	0.2162	0.2010	0.1858	0.1707	0.1559	0.1416	0.1280	0.1150	0.1029	0.0916	0.0811	0.0715	0.0627	0.0547	0.0476	0.0411	13	
	3	0.2489	0.2501	0.2490	0.2457	0.2405	0.2336	0.2252	0.2156	0.2051	0.1939	0.1821	0.1700	0.1579	0.1457	0.1338	0.1222	0.1110	0.1002	12	
	4	0.1752	0.1876	0.1986	0.2079	0.2155	0.2213	0.2252	0.2273	0.2276	0.2262	0.2231	0.2186	0.2128	0.2057	0.1977	0.1888	0.1792	0.1692	11	
	5	0.0904	0.1032	0.1161	0.1290	0.1416	0.1537	0.1651	0.1757	0.1852	0.1935	0.2005	0.2061	0.2103	0.2130	0.2142	0.2140	0.2123	0.2093	10	
	6	0.0353	0.0430	0.0514	0.0606	0.0705	0.0809	0.0917	0.1029	0.1142	0.1254	0.1365	0.1472	0.1575	0.1671	0.1759	0.1837	0.1906	0.1963	9	
	7	0.0107	0.0138	0.0176	0.0220	0.0271	0.0329	0.0393	0.0465	0.0543	0.0627	0.0717	0.0811	0.0910	0.1011	0.1114	0.1217	0.1319	0.1419	8	
	8	0.0025	0.0035	0.0047	0.0062	0.0081	0.0104	0.0131	0.0163	0.0201	0.0244	0.0293	0.0348	0.0409	0.0476	0.0549	0.0627	0.0710	0.0798	7	
	9	0.0005	0.0007	0.0010	0.0014	0.0019	0.0025	0.0034	0.0045	0.0058	0.0074	0.0093	0.0116	0.0143	0.0174	0.0210	0.0251	0.0298	0.0349	6	
	10	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0005	0.0007	0.0009	0.0013	0.0017	0.0023	0.0030	0.0038	0.0049	0.0062	0.0078	0.0096	0.0118	5	
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0004	0.0006	0.0008	0.0011	0.0014	0.0018	0.0024	0.0030	4	
	12	—	—	—	—	—	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0004	0.0006	3	
	13	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	2	
	14	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.0000	0.0000	1	
	15	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0	15
20	0	0.0148	0.0115	0.0090	0.0069	0.0054	0.0041	0.0032	0.0024	0.0018	0.0014	0.0011	0.0008	0.0006	0.0004	0.0003	0.0002	0.0002	0.0001	20	
	1	0.0693	0.0576	0.0477	0.0392	0.0321	0.0261	0.0211	0.0170	0.0137	0.0109	0.0087	0.0068	0.0054	0.0042	0.0033	0.0025	0.0020	0.0015	19	
	2	0.1545	0.1369	0.1204	0.1050	0.0910	0.0783	0.0669	0.0569	0.0480	0.0403	0.0336	0.0278	0.0229	0.0188	0.0153	0.0124	0.0110	0.0080	18	
	3	0.2175	0.2054	0.1920	0.1777	0.1631	0.1484	0.1339	0.1199	0.1065	0.0940	0.0823	0.0716	0.0619	0.0531	0.0453	0.0383	0.0323	0.0270	17	
	4	0.2168	0.2182	0.2169	0.2131	0.2070	0.1991	0.1897	0.1790	0.1675	0.1553	0.1429	0.1304	0.1181	0.1062	0.0947	0.0839	0.0738	0.0645	16	
	5	0.1627	0.1746	0.1845	0.1923	0.1979	0.2012	0.2023	0.2013	0.1982	0.1933	0.1868	0.1789	0.1698	0.1599	0.1493	0.1384	0.1272	0.1161	15	
	6	0.0954	0.1091	0.1226	0.1356	0.1478	0.1589	0.1686	0.1768	0.1833	0.1879	0.1907	0.1916	0.1907	0.1881	0.1839	0.1782	0.1712	0.1632	14	
	7	0.0448	0.0545	0.0652	0.0765	0.0883	0.1003	0.1124	0.1242	0.1356	0.1462	0.1558	0.1643	0.1714	0.1770	0.1811	0.1836	0.1844	0.1836	13	
	8	0.0171	0.0222	0.0282	0.0351	0.0429	0.0515	0.0609	0.0709	0.0815	0.0924	0.1034	0.1144	0.1251	0.1354	0.1450	0.1537	0.1614	0.1678	12	
	9	0.0053	0.0074	0.0100	0.0132	0.0171	0.0217	0.0271	0.0332	0.0402	0.0479	0.0563	0.0654	0.0750	0.0849	0.0952	0.1056	0.1158	0.1259	11	
	10	0.0014	0.0020	0.0029	0.0041	0.0056	0.0075	0.0099	0.0128	0.0163	0.0205	0.0253	0.0308	0.0370	0.0440	0.0516	0.0598	0.0686	0.0779	10	
	11	0.0003	0.0005	0.0007	0.0010	0.0015	0.0022	0.0030	0.0041	0.0055	0.0072	0.0094	0.0120	0.0151	0.0188	0.0231	0.0280	0.0336	0.0398	9	
	12	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0003	0.0005	0.0008	0.0011	0.0015	0.0021	0.0029	0.0039	0.0051	0.0066	0.0085	0.0108	0.0136	0.0168	8	
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0005	0.0007	0.0010	0.0014	0.0019	0.0026	0.0034	0.0045	0.0058	7	
	14	—	—	—	—	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0003	0.0005	0.0006	0.0009	0.0012	0.0016	6	
	15	—	—	—	—	—	—	—	—	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0003	0.0004	5	
	16	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	4	
	17	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.0000	3	
	18	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	
	19	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	
	20	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0	20
n	r	0.81	0.80	0.79	0.78	0.77	0.76	0.75	0.74	0.73	0.72	0.71	0.70	0.69	0.68	0.67	0.66	0.65	0.64	r	n

P

تابع ملحق رقم (3)

n	r	0.37	0.38	0.39	0.40	0.41	0.42	0.43	0.44	0.45	0.46	0.47	0.48	0.49	0.50	r	n
2	0	0.3969	0.3844	0.3721	0.3600	0.3481	0.3364	0.3249	0.3136	0.3025	0.2916	0.2809	0.2704	0.2601	0.2500	2	
	1	0.4662	0.4712	0.4758	0.4800	0.4838	0.4872	0.4902	0.4928	0.4950	0.4968	0.4982	0.4992	0.4998	0.5000	1	
	2	0.1369	0.1444	0.1521	0.1600	0.1681	0.1764	0.1849	0.1936	0.2025	0.2116	0.2209	0.2304	0.2401	0.2500	0	2
3	0	0.2500	0.2383	0.2270	0.2160	0.2054	0.1951	0.1852	0.1756	0.1664	0.1575	0.1489	0.1406	0.1327	0.1250	3	
	1	0.4406	0.4382	0.4354	0.4320	0.4282	0.4239	0.4191	0.4140	0.4084	0.4024	0.3961	0.3894	0.3823	0.3750	2	
	2	0.2587	0.2686	0.2783	0.2880	0.2975	0.3069	0.3162	0.3252	0.3341	0.3428	0.3512	0.3594	0.3674	0.3750	1	
	3	0.0507	0.0549	0.0593	0.0640	0.0689	0.0741	0.0795	0.0852	0.0911	0.0973	0.1038	0.1106	0.1176	0.1250	0	3
4	0	0.1575	0.1478	0.1385	0.1296	0.1212	0.1132	0.1056	0.0983	0.0915	0.0850	0.0789	0.0731	0.0677	0.0625	4	
	1	0.3701	0.3623	0.3541	0.3456	0.3368	0.3278	0.3185	0.3091	0.2995	0.2897	0.2799	0.2700	0.2600	0.2500	3	
	2	0.3260	0.3330	0.3396	0.3456	0.3511	0.3560	0.3604	0.3643	0.3675	0.3702	0.3723	0.3738	0.3747	0.3750	2	
	3	0.1276	0.1361	0.1447	0.1536	0.1627	0.1719	0.1813	0.1908	0.2005	0.2102	0.2201	0.2300	0.2400	0.2500	1	
	4	0.0187	0.0209	0.0231	0.0256	0.0283	0.0311	0.0342	0.0375	0.0410	0.0448	0.0488	0.0531	0.0576	0.0625	0	4
5	0	0.0992	0.0916	0.0845	0.0778	0.0715	0.0656	0.0602	0.0551	0.0503	0.0459	0.0418	0.0380	0.0345	0.0312	5	
	1	0.2914	0.2808	0.2700	0.2592	0.2484	0.2376	0.2270	0.2164	0.2059	0.1956	0.1854	0.1755	0.1657	0.1562	4	
	2	0.3423	0.3441	0.3452	0.3456	0.3452	0.3442	0.3424	0.3400	0.3369	0.3332	0.3289	0.3240	0.3185	0.3125	3	
	3	0.2010	0.2109	0.2207	0.2304	0.2399	0.2492	0.2583	0.2671	0.2757	0.2838	0.2916	0.2990	0.3060	0.3125	2	
	4	0.0590	0.0646	0.0706	0.0768	0.0834	0.0902	0.0974	0.1049	0.1128	0.1209	0.1293	0.1380	0.1470	0.1562	1	
	5	0.0069	0.0079	0.0090	0.0102	0.0116	0.0131	0.0147	0.0165	0.0185	0.0206	0.0229	0.0255	0.0282	0.0312	0	5
6	0	0.0625	0.0568	0.0515	0.0467	0.0422	0.0381	0.0343	0.0308	0.0277	0.0248	0.0222	0.0198	0.0176	0.0156	6	
	1	0.2203	0.2089	0.1976	0.1866	0.1759	0.1654	0.1552	0.1454	0.1359	0.1267	0.1179	0.1095	0.1014	0.0937	5	
	2	0.3235	0.3201	0.3159	0.3110	0.3055	0.2994	0.2928	0.2856	0.2780	0.2699	0.2615	0.2527	0.2436	0.2344	4	
	3	0.2533	0.2616	0.2693	0.2765	0.2831	0.2891	0.2945	0.2992	0.3032	0.3065	0.3091	0.3110	0.3121	0.3125	3	
	4	0.1116	0.1202	0.1291	0.1382	0.1475	0.1570	0.1666	0.1763	0.1861	0.1958	0.2056	0.2153	0.2249	0.2344	2	
	5	0.0262	0.0295	0.0330	0.0369	0.0410	0.0455	0.0503	0.0554	0.0609	0.0667	0.0729	0.0795	0.0864	0.0937	1	
	6	0.0026	0.0030	0.0035	0.0041	0.0048	0.0055	0.0063	0.0073	0.0083	0.0095	0.0108	0.0122	0.0138	0.0156	0	6
7	0	0.0394	0.0352	0.0314	0.0280	0.0249	0.0221	0.0195	0.0173	0.0152	0.0134	0.0117	0.0103	0.0090	0.0078	7	
	1	0.1619	0.1511	0.1407	0.1306	0.1211	0.1119	0.1032	0.0950	0.0872	0.0798	0.0729	0.0664	0.0604	0.0547	6	
	2	0.2853	0.2778	0.2698	0.2613	0.2524	0.2431	0.2336	0.2239	0.2140	0.2040	0.1940	0.1840	0.1740	0.1641	5	
	3	0.2793	0.2838	0.2875	0.2903	0.2923	0.2934	0.2937	0.2932	0.2918	0.2897	0.2867	0.2830	0.2786	0.2734	4	
	4	0.1640	0.1739	0.1838	0.1935	0.2031	0.2125	0.2216	0.2304	0.2388	0.2468	0.2543	0.2612	0.2676	0.2734	3	
	5	0.0578	0.0640	0.0705	0.0774	0.0847	0.0923	0.1003	0.1086	0.1172	0.1261	0.1353	0.1447	0.1543	0.1641	2	
	6	0.0113	0.0131	0.0150	0.0172	0.0196	0.0223	0.0252	0.0284	0.0320	0.0358	0.0400	0.0445	0.0494	0.0547	1	
	7	0.0009	0.0011	0.0014	0.0016	0.0019	0.0023	0.0027	0.0032	0.0037	0.0044	0.0051	0.0059	0.0068	0.0078	0	7
n	r	0.63	0.62	0.61	0.60	0.59	0.58	0.57	0.56	0.55	0.54	0.53	0.52	0.51	0.50	r	n

The upper header row (0.37–0.50) and the lower header row (0.63–0.50) are both labelled P.

تابع ملحق رقم (3)

		p															
n	r	0.37	0.38	0.39	0.40	0.41	0.42	0.43	0.44	0.45	0.46	0.47	0.48	0.49	0.50	r	n
8	0	0.0248	0.0218	0.0192	0.0168	0.0147	0.0128	0.0111	0.0097	0.0084	0.0072	0.0062	0.0053	0.0046	0.0039	8	
	1	0.1166	0.1071	0.0981	0.0896	0.0816	0.0742	0.0672	0.0608	0.0548	0.0493	0.0442	0.0395	0.0352	0.0312	7	
	2	0.2397	0.2297	0.2194	0.2090	0.1985	0.1880	0.1776	0.1672	0.1569	0.1469	0.1371	0.1275	0.1183	0.1094	6	
	3	0.2815	0.2815	0.2806	0.2787	0.2759	0.2723	0.2679	0.2627	0.2568	0.2503	0.2431	0.2355	0.2273	0.2187	5	
	4	0.2067	0.2157	0.2242	0.2322	0.2397	0.2465	0.2526	0.2580	0.2627	0.2665	0.2695	0.2717	0.2730	0.2734	4	
	5	0.0971	0.1058	0.1147	0.1239	0.1332	0.1428	0.1525	0.1622	0.1719	0.1816	0.1912	0.2006	0.2098	0.2187	3	
	6	0.0285	0.0324	0.0367	0.0413	0.0463	0.0517	0.0575	0.0637	0.0703	0.0774	0.0848	0.0926	0.1008	0.1094	2	
	7	0.0048	0.0057	0.0067	0.0079	0.0092	0.0107	0.0124	0.0143	0.0164	0.0188	0.0215	0.0244	0.0277	0.0312	1	
	8	0.0004	0.0004	0.0005	0.0007	0.0008	0.0010	0.0012	0.0014	0.0017	0.0020	0.0024	0.0028	0.0033	0.0039	0	8
9	0	0.0156	0.0135	0.0117	0.0101	0.0087	0.0074	0.0064	0.0054	0.0046	0.0039	0.0033	0.0028	0.0023	0.0020	9	
	1	0.0826	0.0747	0.0673	0.0605	0.0542	0.0484	0.0431	0.0383	0.0339	0.0299	0.0263	0.0231	0.0202	0.0176	8	
	2	0.1941	0.1831	0.1721	0.1612	0.1506	0.1402	0.1301	0.1204	0.1110	0.1020	0.0934	0.0853	0.0776	0.0703	7	
	3	0.2660	0.2618	0.2567	0.2508	0.2442	0.2369	0.2291	0.2207	0.2119	0.2027	0.1933	0.1837	0.1739	0.1641	6	
	4	0.2344	0.2407	0.2462	0.2508	0.2545	0.2573	0.2592	0.2601	0.2600	0.2590	0.2571	0.2543	0.2506	0.2461	5	
	5	0.1376	0.1475	0.1574	0.1672	0.1769	0.1863	0.1955	0.2044	0.2128	0.2207	0.2280	0.2347	0.2408	0.2461	4	
	6	0.0539	0.0603	0.0671	0.0743	0.0819	0.0900	0.0983	0.1070	0.1160	0.1253	0.1348	0.1445	0.1542	0.1641	3	
	7	0.0136	0.0158	0.0184	0.0212	0.0244	0.0279	0.0318	0.0360	0.0407	0.0458	0.0512	0.0571	0.0635	0.0703	2	
	8	0.0020	0.0024	0.0029	0.0035	0.0042	0.0051	0.0060	0.0071	0.0083	0.0097	0.0114	0.0132	0.0153	0.0176	1	
	9	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0008	0.0009	0.0011	0.0014	0.0016	0.0020	0	9
10	0	0.0098	0.0084	0.0071	0.0060	0.0051	0.0043	0.0036	0.0030	0.0025	0.0021	0.0017	0.0014	0.0012	0.0010	10	
	1	0.0578	0.0514	0.0456	0.0403	0.0355	0.0312	0.0273	0.0238	0.0207	0.0180	0.0155	0.0133	0.0114	0.0098	9	
	2	0.1529	0.1419	0.1312	0.1209	0.1111	0.1017	0.0927	0.0843	0.0763	0.0688	0.0619	0.0554	0.0494	0.0439	8	
	3	0.2394	0.2319	0.2237	0.2150	0.2058	0.1963	0.1865	0.1765	0.1665	0.1564	0.1464	0.1364	0.1267	0.1172	7	
	4	0.2461	0.2487	0.2503	0.2508	0.2503	0.2488	0.2462	0.2427	0.2384	0.2331	0.2271	0.2204	0.2130	0.2051	6	
	5	0.1734	0.1829	0.1920	0.2007	0.2087	0.2162	0.2229	0.2289	0.2340	0.2383	0.2417	0.2441	0.2456	0.2461	5	
	6	0.0849	0.0934	0.1023	0.1115	0.1209	0.1304	0.1401	0.1499	0.1596	0.1692	0.1786	0.1878	0.1966	0.2051	4	
	7	0.0285	0.0327	0.0374	0.0425	0.0480	0.0540	0.0604	0.0673	0.0746	0.0824	0.0905	0.0991	0.1080	0.1172	3	
	8	0.0063	0.0075	0.0090	0.0106	0.0125	0.0147	0.0171	0.0198	0.0229	0.0263	0.0301	0.0343	0.0389	0.0439	2	
	9	0.0008	0.0010	0.0013	0.0016	0.0019	0.0024	0.0029	0.0035	0.0042	0.0050	0.0059	0.0070	0.0083	0.0098	1	
	10	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0008	0.0010	0	10
n	r	0.63	0.62	0.61	0.60	0.59	0.58	0.57	0.56	0.55	0.54	0.53	0.52	0.51	0.50	r	n
		p															

تابع ملحق رقم (3)

n	r	0.37	0.38	0.39	0.40	0.41	0.42	0.43	0.44	0.45	0.46	0.47	0.48	0.49	0.50	r	n
12	0	0.0039	0.0032	0.0027	0.0022	0.0018	0.0014	0.0012	0.0010	0.0008	0.0006	0.0005	0.0004	0.0003	0.0002	12	
	1	0.0276	0.0237	0.0204	0.0174	0.0148	0.0126	0.0106	0.0090	0.0075	0.0063	0.0052	0.0043	0.0036	0.0029	11	
	2	0.0890	0.0800	0.0716	0.0639	0.0567	0.0502	0.0442	0.0388	0.0339	0.0294	0.0255	0.0220	0.0189	0.0161	10	
	3	0.1742	0.1634	0.1526	0.1419	0.1314	0.1211	0.1111	0.1015	0.0923	0.0836	0.0754	0.0676	0.0604	0.0537	9	
	4	0.2302	0.2254	0.2195	0.2128	0.2054	0.1973	0.1886	0.1794	0.1700	0.1602	0.1504	0.1405	0.1306	0.1208	8	
	5	0.2163	0.2210	0.2246	0.2270	0.2284	0.2285	0.2276	0.2256	0.2225	0.2184	0.2134	0.2075	0.2008	0.1934	7	
	6	0.1482	0.1580	0.1675	0.1766	0.1851	0.1931	0.2003	0.2068	0.2124	0.2171	0.2208	0.2234	0.2250	0.2256	6	
	7	0.0746	0.0830	0.0918	0.1009	0.1103	0.1198	0.1295	0.1393	0.1489	0.1585	0.1678	0.1768	0.1853	0.1934	5	
	8	0.0274	0.0318	0.0367	0.0420	0.0479	0.0542	0.0611	0.0684	0.0762	0.0844	0.0930	0.1020	0.1113	0.1208	4	
	9	0.0071	0.0087	0.0104	0.0125	0.0148	0.0175	0.0205	0.0239	0.0277	0.0319	0.0367	0.0418	0.0475	0.0537	3	
	10	0.0013	0.0016	0.0020	0.0025	0.0031	0.0038	0.0046	0.0056	0.0068	0.0082	0.0098	0.0116	0.0137	0.0161	2	
	11	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0008	0.0010	0.0013	0.0016	0.0019	0.0024	0.0029	1	
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0	12
15	0	0.0010	0.0008	0.0006	0.0005	0.0004	0.0003	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	15	
	1	0.0086	0.0071	0.0058	0.0047	0.0038	0.0031	0.0025	0.0020	0.0016	0.0012	0.0010	0.0008	0.0006	0.0005	14	
	2	0.0354	0.0303	0.0259	0.0219	0.0185	0.0156	0.0130	0.0108	0.0090	0.0074	0.0060	0.0049	0.0040	0.0032	13	
	3	0.0901	0.0805	0.0716	0.0634	0.0558	0.0489	0.0426	0.0369	0.0318	0.0272	0.0232	0.0197	0.0166	0.0139	12	
	4	0.1587	0.1481	0.1374	0.1268	0.1163	0.1061	0.0963	0.0869	0.0780	0.0696	0.0617	0.0545	0.0478	0.0417	11	
	5	0.2051	0.1997	0.1933	0.1859	0.1778	0.1691	0.1598	0.1502	0.1404	0.1304	0.1204	0.1106	0.1010	0.0916	10	
	6	0.2008	0.2040	0.2059	0.2066	0.2060	0.2041	0.2010	0.1967	0.1914	0.1851	0.1780	0.1702	0.1617	0.1527	9	
	7	0.1516	0.1608	0.1693	0.1771	0.1840	0.1900	0.1949	0.1987	0.2013	0.2028	0.2030	0.2020	0.1997	0.1964	8	
	8	0.0890	0.0985	0.1082	0.1181	0.1279	0.1376	0.1470	0.1561	0.1647	0.1727	0.1800	0.1864	0.1919	0.1964	7	
	9	0.0407	0.0470	0.0538	0.0612	0.0691	0.0775	0.0863	0.0954	0.1048	0.1144	0.1241	0.1338	0.1434	0.1527	6	
	10	0.0143	0.0173	0.0206	0.0245	0.0288	0.0337	0.0390	0.0450	0.0515	0.0585	0.0661	0.0741	0.0827	0.0916	5	
	11	0.0038	0.0048	0.0060	0.0074	0.0091	0.0111	0.0134	0.0161	0.0191	0.0226	0.0266	0.0311	0.0361	0.0417	4	
	12	0.0007	0.0010	0.0013	0.0016	0.0021	0.0027	0.0034	0.0042	0.0052	0.0064	0.0079	0.0096	0.0116	0.0139	3	
	13	0.0001	0.0001	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0006	0.0008	0.0010	0.0013	0.0016	0.0020	0.0026	0.0032	2	
	14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	1	
	15	—	—	—	—	—	—	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0	15
20	0	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	—	—	—	20	
	1	0.0011	0.0009	0.0007	0.0005	0.0004	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	19	
	2	0.0064	0.0050	0.0040	0.0031	0.0024	0.0018	0.0014	0.0011	0.0008	0.0006	0.0005	0.0003	0.0002	0.0002	18	
	3	0.0224	0.0185	0.0152	0.0123	0.0100	0.0080	0.0064	0.0051	0.0040	0.0031	0.0024	0.0019	0.0014	0.0011	17	
	4	0.0559	0.0482	0.0412	0.0350	0.0295	0.0247	0.0206	0.0170	0.0139	0.0113	0.0092	0.0074	0.0059	0.0046	16	
	5	0.1051	0.0945	0.0843	0.0746	0.0656	0.0573	0.0496	0.0427	0.0365	0.0309	0.0260	0.0217	0.0180	0.0148	15	
	6	0.1543	0.1447	0.1347	0.1244	0.1140	0.1037	0.0936	0.0839	0.0746	0.0658	0.0577	0.0501	0.0432	0.0370	14	
	7	0.1812	0.1774	0.1722	0.1659	0.1585	0.1502	0.1413	0.1318	0.1221	0.1122	0.1023	0.0925	0.0830	0.0739	13	
	8	0.1730	0.1767	0.1790	0.1797	0.1790	0.1768	0.1732	0.1683	0.1623	0.1553	0.1474	0.1388	0.1296	0.1201	12	
	9	0.1354	0.1444	0.1526	0.1597	0.1658	0.1707	0.1742	0.1763	0.1771	0.1763	0.1742	0.1708	0.1661	0.1602	11	
	10	0.0875	0.0974	0.1073	0.1171	0.1268	0.1359	0.1446	0.1524	0.1593	0.1652	0.1700	0.1734	0.1755	0.1762	10	
	11	0.0467	0.0542	0.0624	0.0710	0.0801	0.0895	0.0991	0.1089	0.1185	0.1280	0.1370	0.1455	0.1533	0.1602	9	
	12	0.0206	0.0249	0.0299	0.0355	0.0417	0.0486	0.0561	0.0642	0.0727	0.0818	0.0911	0.1007	0.1105	0.1201	8	
	13	0.0074	0.0094	0.0118	0.0146	0.0178	0.0217	0.0260	0.0310	0.0366	0.0429	0.0497	0.0572	0.0653	0.0739	7	
	14	0.0022	0.0029	0.0038	0.0049	0.0062	0.0078	0.0098	0.0122	0.0150	0.0183	0.0221	0.0264	0.0314	0.0370	6	
	15	0.0005	0.0007	0.0010	0.0013	0.0017	0.0023	0.0030	0.0038	0.0049	0.0062	0.0078	0.0098	0.0121	0.0148	5	
	16	0.0001	0.0001	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0007	0.0009	0.0013	0.0017	0.0022	0.0028	0.0036	0.0046	4	
	17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0005	0.0006	0.0008	0.0011	3	
	18	—	—	—	—	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	2	
	19	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1	
	20	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0	20
n	r	0.63	0.62	0.61	0.60	0.59	0.58	0.57	0.56	0.55	0.54	0.53	0.52	0.51	0.50	r	n

P

ملحق رقم (4a)

Appendix Table 4(a)

Values of $e^{-\lambda}$ for Computing Poisson Probabilities

λ	$e^{-\lambda}$	λ	$e^{-\lambda}$	λ	$e^{-\lambda}$	λ	$e^{-\lambda}$
0.1	0.90484	2.6	0.07427	5.1	0.00610	7.6	0.00050
0.2	0.81873	2.7	0.06721	5.2	0.00552	7.7	0.00045
0.3	0.74082	2.8	0.06081	5.3	0.00499	7.8	0.00041
0.4	0.67032	2.9	0.05502	5.4	0.00452	7.9	0.00037
0.5	0.60653	3.0	0.04979	5.5	0.00409	8.0	0.00034
0.6	0.54881	3.1	0.04505	5.6	0.00370	8.1	0.00030
0.7	0.49659	3.2	0.04076	5.7	0.00335	8.2	0.00027
0.8	0.44933	3.3	0.03688	5.8	0.00303	8.3	0.00025
0.9	0.40657	3.4	0.03337	5.9	0.00274	8.4	0.00022
1.0	0.36788	3.5	0.03020	6.0	0.00248	8.5	0.00020
1.1	0.33287	3.6	0.02732	6.1	0.00224	8.6	0.00018
1.2	0.30119	3.7	0.02472	6.2	0.00203	8.7	0.00017
1.3	0.27253	3.8	0.02237	6.3	0.00184	8.8	0.00015
1.4	0.24660	3.9	0.02024	6.4	0.00166	8.9	0.00014
1.5	0.22313	4.0	0.01832	6.5	0.00150	9.0	0.00012
1.6	0.20190	4.1	0.01657	6.6	0.00136	9.1	0.00011
1.7	0.18268	4.2	0.01500	6.7	0.00123	9.2	0.00010
1.8	0.16530	4.3	0.01357	6.8	0.00111	9.3	0.00009
1.9	0.14957	4.4	0.01228	6.9	0.00101	9.4	0.00008
2.0	0.13534	4.5	0.01111	7.0	0.00091	9.5	0.00007
2.1	0.12246	4.6	0.01005	7.1	0.00083	9.6	0.00007
2.2	0.11080	4.7	0.00910	7.2	0.00075	9.7	0.00006
2.3	0.10026	4.8	0.00823	7.3	0.00068	9.8	0.00006
2.4	0.09072	4.9	0.00745	7.4	0.00061	9.9	0.00005
2.5	0.08208	5.0	0.00674	7.5	0.00055	10.0	0.00005

ملحق رقم (4b)

Appendix Table 4(b)

Direct Values for Determining Poisson Probabilities

For a given value of λ, entry indicates the probability of obtaining a specified value of X.

	λ									
X	**0.1**	**0.2**	**0.3**	**0.4**	**0.5**	**0.6**	**0.7**	**0.8**	**0.9**	**1.0**
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066	0.3679
1	0.0905	0.1637	0.2222	0.2681	0.3033	0.3293	0.3476	0.3595	0.3659	0.3679
2	0.0045	0.0164	0.0333	0.0536	0.0758	0.0988	0.1217	0.1438	0.1647	0.1839
3	0.0002	0.0011	0.0033	0.0072	0.0126	0.0198	0.0284	0.0383	0.0494	0.0613
4	0.0000	0.0001	0.0003	0.0007	0.0016	0.0030	0.0050	0.0077	0.0111	0.0153
5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0004	0.0007	0.0012	0.0020	0.0031
6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0003	0.0005
7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001

	λ									
X	**1.1**	**1.2**	**1.3**	**1.4**	**1.5**	**1.6**	**1.7**	**1.8**	**1.9**	**2.0**
0	0.3329	0.3012	0.2725	0.2466	0.2231	0.2019	0.1827	0.1653	0.1496	0.1353
1	0.3662	0.3614	0.3543	0.3452	0.3347	0.3230	0.3106	0.2975	0.2842	0.2707
2	0.2014	0.2169	0.2303	0.2417	0.2510	0.2584	0.2640	0.2678	0.2700	0.2707
3	0.0738	0.0867	0.0998	0.1128	0.1255	0.1378	0.1496	0.1607	0.1710	0.1804
4	0.0203	0.0260	0.0324	0.0395	0.0471	0.0551	0.0636	0.0723	0.0812	0.0902
5	0.0045	0.0062	0.0084	0.0111	0.0141	0.0176	0.0216	0.0260	0.0309	0.0361
6	0.0008	0.0012	0.0018	0.0026	0.0035	0.0047	0.0061	0.0078	0.0098	0.0120
7	0.0001	0.0002	0.0003	0.0005	0.0008	0.0011	0.0015	0.0020	0.0027	0.0034
8	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0003	0.0005	0.0006	0.0009
9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002

	λ									
X	**2.1**	**2.2**	**2.3**	**2.4**	**2.5**	**2.6**	**2.7**	**2.8**	**2.9**	**3.0**
0	0.1225	0.1108	0.1003	0.0907	0.0821	0.0743	0.0672	0.0608	0.0550	0.0498
1	0.2572	0.2438	0.2306	0.2177	0.2052	0.1931	0.1815	0.1703	0.1596	0.1494
2	0.2700	0.2681	0.2652	0.2613	0.2565	0.2510	0.2450	0.2384	0.2314	0.2240
3	0.1890	0.1966	0.2033	0.2090	0.2138	0.2176	0.2205	0.2225	0.2237	0.2240
4	0.0992	0.1082	0.1169	0.1254	0.1336	0.1414	0.1488	0.1557	0.1622	0.1680
5	0.0417	0.0476	0.0538	0.0602	0.0668	0.0735	0.0804	0.0872	0.0940	0.1008
6	0.0146	0.0174	0.0206	0.0241	0.0278	0.0319	0.0362	0.0407	0.0455	0.0504
7	0.0044	0.0055	0.0068	0.0083	0.0099	0.0118	0.0139	0.0163	0.0188	0.0216
8	0.0011	0.0015	0.0019	0.0025	0.0031	0.0038	0.0047	0.0057	0.0068	0.0081
9	0.0003	0.0004	0.0005	0.0007	0.0009	0.0011	0.0014	0.0018	0.0022	0.0027
10	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0008
11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002
12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001

تابع ملحق رقم (4b)

	λ									
X	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0
0	0.0450	0.0408	0.0369	0.0334	0.0302	0.0273	0.0247	0.0224	0.0202	0.0183
1	0.1397	0.1304	0.1217	0.1135	0.1057	0.0984	0.0915	0.0850	0.0789	0.0733
2	0.2165	0.2087	0.2008	0.1929	0.1850	0.1771	0.1692	0.1615	0.1539	0.1465
3	0.2237	0.2226	0.2209	0.2186	0.2158	0.2125	0.2087	0.2046	0.2001	0.1954
4	0.1734	0.1781	0.1823	0.1858	0.1888	0.1912	0.1931	0.1944	0.1951	0.1954
5	0.1075	0.1140	0.1203	0.1264	0.1322	0.1377	0.1429	0.1477	0.1522	0.1563
6	0.0555	0.0608	0.0662	0.0716	0.0771	0.0826	0.0881	0.0936	0.0989	0.1042
7	0.0246	0.0278	0.0312	0.0348	0.0385	0.0425	0.0466	0.0508	0.0551	0.0595
8	0.0095	0.0111	0.0129	0.0148	0.0169	0.0191	0.0215	0.0241	0.0269	0.0298
9	0.0033	0.0040	0.0047	0.0056	0.0066	0.0076	0.0089	0.0102	0.0116	0.0132
10	0.0010	0.0013	0.0016	0.0019	0.0023	0.0028	0.0033	0.0039	0.0045	0.0053
11	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0007	0.0009	0.0011	0.0013	0.0016	0.0019
12	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006
13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002
14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001

	λ									
X	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9	5.0
0	0.0166	0.0150	0.0136	0.0123	0.0111	0.0101	0.0091	0.0082	0.0074	0.0067
1	0.0679	0.0630	0.0583	0.0540	0.0500	0.0462	0.0427	0.0395	0.0365	0.0337
2	0.1393	0.1323	0.1254	0.1188	0.1125	0.1063	0.1005	0.0948	0.0894	0.0842
3	0.1904	0.1852	0.1798	0.1743	0.1687	0.1631	0.1574	0.1517	0.1460	0.1404
4	0.1951	0.1944	0.1933	0.1917	0.1898	0.1875	0.1849	0.1820	0.1789	0.1755
5	0.1600	0.1633	0.1662	0.1687	0.1708	0.1725	0.1738	0.1747	0.1753	0.1755
6	0.1093	0.1143	0.1191	0.1237	0.1281	0.1323	0.1362	0.1398	0.1432	0.1462
7	0.0640	0.0686	0.0732	0.0778	0.0824	0.0869	0.0914	0.0959	0.1022	0.1044
8	0.0328	0.0360	0.0393	0.0428	0.0463	0.0500	0.0537	0.0575	0.0614	0.0653
9	0.0150	0.0168	0.0188	0.0209	0.0232	0.0255	0.0280	0.0307	0.0334	0.0363
10	0.0061	0.0071	0.0081	0.0092	0.0104	0.0118	0.0132	0.0147	0.0164	0.0181
11	0.0023	0.0027	0.0032	0.0037	0.0043	0.0049	0.0056	0.0064	0.0073	0.0082
12	0.0008	0.0009	0.0011	0.0014	0.0016	0.0019	0.0022	0.0026	0.0030	0.0034
13	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009	0.0011	0.0013
14	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0005
15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002

	λ									
X	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8	5.9	6.0
0	0.0061	0.0055	0.0050	0.0045	0.0041	0.0037	0.0033	0.0030	0.0027	0.0025
1	0.0311	0.0287	0.0265	0.0244	0.0225	0.0207	0.0191	0.0176	0.0162	0.0149
2	0.0793	0.0746	0.0701	0.0659	0.0618	0.0580	0.0544	0.0509	0.0477	0.0446
3	0.1348	0.1293	0.1239	0.1185	0.1133	0.1082	0.1033	0.0985	0.0938	0.0892
4	0.1719	0.1681	0.1641	0.1600	0.1558	0.1515	0.1472	0.1428	0.1383	0.1339
5	0.1753	0.1748	0.1740	0.1728	0.1714	0.1697	0.1678	0.1656	0.1632	0.1606
6	0.1490	0.1515	0.1537	0.1555	0.1571	0.1584	0.1594	0.1601	0.1605	0.1606
7	0.1086	0.1125	0.1163	0.1200	0.1234	0.1267	0.1298	0.1326	0.1353	0.1377
8	0.0692	0.0731	0.0771	0.0810	0.0849	0.0887	0.0925	0.0962	0.0998	0.1033
9	0.0392	0.0423	0.0454	0.0486	0.0519	0.0552	0.0586	0.0620	0.0654	0.0688
10	0.0200	0.0220	0.0241	0.0262	0.0285	0.0309	0.0334	0.0359	0.0386	0.0413
11	0.0093	0.0104	0.0116	0.0129	0.0143	0.0157	0.0173	0.0190	0.0207	0.0225
12	0.0039	0.0045	0.0051	0.0058	0.0065	0.0073	0.0082	0.0092	0.0102	0.0113
13	0.0015	0.0018	0.0021	0.0024	0.0028	0.0032	0.0036	0.0041	0.0046	0.0052
14	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009	0.0011	0.0013	0.0015	0.0017	0.0019	0.0022
15	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009
16	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003
17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001

تابع ملحق رقم (4b)

X	λ = 6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6	6.7	6.8	6.9	7.0
0	0.0022	0.0020	0.0018	0.0017	0.0015	0.0014	0.0012	0.0011	0.0010	0.0009
1	0.0137	0.0126	0.0116	0.0106	0.0098	0.0090	0.0082	0.0076	0.0070	0.0064
2	0.0417	0.0390	0.0364	0.0340	0.0318	0.0296	0.0276	0.0258	0.0240	0.0223
3	0.0848	0.0806	0.0765	0.0726	0.0688	0.0652	0.0617	0.0584	0.0552	0.0521
4	0.1294	0.1249	0.1205	0.1162	0.1118	0.1076	0.1034	0.0992	0.0952	0.0912
5	0.1579	0.1549	0.1519	0.1487	0.1454	0.1420	0.1385	0.1349	0.1314	0.1277
6	0.1605	0.1601	0.1595	0.1586	0.1575	0.1562	0.1546	0.1529	0.1511	0.1490
7	0.1399	0.1418	0.1435	0.1450	0.1462	0.1472	0.1480	0.1486	0.1489	0.1490
8	0.1066	0.1099	0.1130	0.1160	0.1188	0.1215	0.1240	0.1263	0.1284	0.1304
9	0.0723	0.0757	0.0791	0.0825	0.0858	0.0891	0.0923	0.0954	0.0985	0.1014
10	0.0441	0.0469	0.0498	0.0528	0.0558	0.0588	0.0618	0.0649	0.0679	0.0710
11	0.0245	0.0265	0.0285	0.0307	0.0330	0.0353	0.0377	0.0401	0.0426	0.0452
12	0.0124	0.0137	0.0150	0.0164	0.0179	0.0194	0.0210	0.0227	0.0245	0.0264
13	0.0058	0.0065	0.0073	0.0081	0.0089	0.0098	0.0108	0.0119	0.0130	0.0142
14	0.0025	0.0029	0.0033	0.0037	0.0041	0.0046	0.0052	0.0058	0.0064	0.0071
15	0.0010	0.0012	0.0014	0.0016	0.0018	0.0020	0.0023	0.0026	0.0029	0.0033
16	0.0004	0.0005	0.0005	0.0006	0.0007	0.0008	0.0010	0.0011	0.0013	0.0014
17	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0004	0.0005	0.0006
18	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002
19	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001

X	λ = 7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.6	7.7	7.8	7.9	8.0
0	0.0008	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0003
1	0.0059	0.0054	0.0049	0.0045	0.0041	0.0038	0.0035	0.0032	0.0029	0.0027
2	0.0208	0.0194	0.0180	0.0167	0.0156	0.0145	0.0134	0.0125	0.0116	0.0107
3	0.0492	0.0464	0.0438	0.0413	0.0389	0.0366	0.0345	0.0324	0.0305	0.0286
4	0.0874	0.0836	0.0799	0.0764	0.0729	0.0696	0.0663	0.0632	0.0602	0.0573
5	0.1241	0.1204	0.1167	0.1130	0.1094	0.1057	0.1021	0.0986	0.0951	0.0916
6	0.1468	0.1445	0.1420	0.1394	0.1367	0.1339	0.1311	0.1282	0.1252	0.1221
7	0.1489	0.1486	0.1481	0.1474	0.1465	0.1454	0.1442	0.1428	0.1413	0.1396
8	0.1321	0.1337	0.1351	0.1363	0.1373	0.1382	0.1388	0.1392	0.1395	0.1396
9	0.1042	0.1070	0.1096	0.1121	0.1144	0.1167	0.1187	0.1207	0.1224	0.1241
10	0.0740	0.0770	0.0800	0.0829	0.0858	0.0887	0.0914	0.0941	0.0967	0.0993
11	0.0478	0.0504	0.0531	0.0558	0.0585	0.0613	0.0640	0.0667	0.0695	0.0722
12	0.0283	0.0303	0.0323	0.0344	0.0366	0.0388	0.0411	0.0434	0.0457	0.0481
13	0.0154	0.0168	0.0181	0.0196	0.0211	0.0227	0.0243	0.0260	0.0278	0.0296
14	0.0078	0.0086	0.0095	0.0104	0.0113	0.0123	0.0134	0.0145	0.0157	0.0169
15	0.0037	0.0041	0.0046	0.0051	0.0057	0.0062	0.0069	0.0075	0.0083	0.0090
16	0.0016	0.0019	0.0021	0.0024	0.0026	0.0030	0.0033	0.0037	0.0041	0.0045
17	0.0007	0.0008	0.0009	0.0010	0.0012	0.0013	0.0015	0.0017	0.0019	0.0021
18	0.0003	0.0003	0.0004	0.0004	0.0005	0.0006	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009
19	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0003	0.0004
20	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002
21	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001

تابع ملحق رقم (4b)

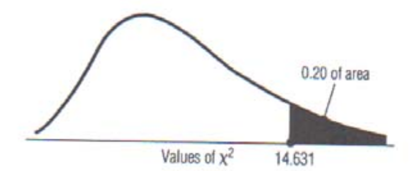
	λ									
x	8.1	8.2	8.3	8.4	8.5	8.6	8.7	8.8	8.9	9.0
0	0.0003	0.0003	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001
1	0.0025	0.0023	0.0021	0.0019	0.0017	0.0016	0.0014	0.0013	0.0012	0.0011
2	0.0100	0.0092	0.0086	0.0079	0.0074	0.0068	0.0063	0.0058	0.0054	0.0050
3	0.0269	0.0252	0.0237	0.0222	0.0208	0.0195	0.0183	0.0171	0.0160	0.0150
4	0.0544	0.0517	0.0491	0.0466	0.0443	0.0420	0.0398	0.0377	0.0357	0.0337
5	0.0882	0.0849	0.0816	0.0784	0.0752	0.0722	0.0692	0.0663	0.0635	0.0607
6	0.1191	0.1160	0.1128	0.1097	0.1066	0.1034	0.1003	0.0972	0.0941	0.0911
7	0.1378	0.1358	0.1338	0.1317	0.1294	0.1271	0.1247	0.1222	0.1197	0.1171
8	0.1395	0.1392	0.1388	0.1382	0.1375	0.1366	0.1356	0.1344	0.1332	0.1318
9	0.1256	0.1269	0.1280	0.1290	0.1299	0.1306	0.1311	0.1315	0.1317	0.1318
10	0.1017	0.1040	0.1063	0.1084	0.1104	0.1123	0.1140	0.1157	0.1172	0.1186
11	0.0749	0.0776	0.0802	0.0828	0.0853	0.0878	0.0902	0.0925	0.0948	0.0970
12	0.0505	0.0530	0.0555	0.0579	0.0604	0.0629	0.0654	0.0679	0.0703	0.0728
13	0.0315	0.0334	0.0354	0.0374	0.0395	0.0416	0.0438	0.0459	0.0481	0.0504
14	0.0182	0.0196	0.0210	0.0225	0.0240	0.0256	0.0272	0.0289	0.0306	0.0324
15	0.0098	0.0107	0.0116	0.0126	0.0136	0.0147	0.0158	0.0169	0.0182	0.0194
16	0.0050	0.0055	0.0060	0.0066	0.0072	0.0079	0.0086	0.0093	0.0101	0.0109
17	0.0024	0.0026	0.0029	0.0033	0.0036	0.0040	0.0044	0.0048	0.0053	0.0058
18	0.0011	0.0012	0.0014	0.0015	0.0017	0.0019	0.0021	0.0024	0.0026	0.0029
19	0.0005	0.0005	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009	0.0010	0.0011	0.0012	0.0014
20	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0004	0.0005	0.0005	0.0006
21	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003
22	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001

	λ									
x	9.1	9.2	9.3	9.4	9.5	9.6	9.7	9.8	9.9	10
0	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000
1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0008	0.0007	0.0007	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
2	0.0046	0.0043	0.0040	0.0037	0.0034	0.0031	0.0029	0.0027	0.0025	0.0023
3	0.0140	0.0131	0.0123	0.0115	0.0107	0.0100	0.0093	0.0087	0.0081	0.0076
4	0.0319	0.0302	0.0285	0.0269	0.0254	0.0240	0.0226	0.0213	0.0201	0.0189
5	0.0581	0.0555	0.0530	0.0506	0.0483	0.0460	0.0439	0.0418	0.0398	0.0378
6	0.0881	0.0851	0.0822	0.0793	0.0764	0.0736	0.0709	0.0682	0.0656	0.0631
7	0.1145	0.1118	0.1091	0.1064	0.1037	0.1010	0.0982	0.0955	0.0928	0.0901
8	0.1302	0.1286	0.1269	0.1251	0.1232	0.1212	0.1191	0.1170	0.1148	0.1126
9	0.1317	0.1315	0.1311	0.1306	0.1300	0.1293	0.1284	0.1274	0.1263	0.1251
10	0.1198	0.1210	0.1219	0.1228	0.1235	0.1241	0.1245	0.1249	0.1250	0.1251
11	0.0991	0.1012	0.1031	0.1049	0.1067	0.1083	0.1098	0.1112	0.1125	0.1137
12	0.0752	0.0776	0.0799	0.0822	0.0844	0.0866	0.0888	0.0908	0.0928	0.0948
13	0.0526	0.0549	0.0572	0.0594	0.0617	0.0640	0.0662	0.0685	0.0707	0.0729
14	0.0342	0.0361	0.0380	0.0399	0.0419	0.0439	0.0459	0.0479	0.0500	0.0521
15	0.0208	0.0221	0.0235	0.0250	0.0265	0.0281	0.0297	0.0313	0.0330	0.0347
16	0.0118	0.0127	0.0137	0.0147	0.0157	0.0168	0.0180	0.0192	0.0204	0.0217
17	0.0063	0.0069	0.0075	0.0081	0.0088	0.0095	0.0103	0.0111	0.0119	0.0128
18	0.0032	0.0035	0.0039	0.0042	0.0046	0.0051	0.0055	0.0060	0.0065	0.0071
19	0.0015	0.0017	0.0019	0.0021	0.0023	0.0026	0.0028	0.0031	0.0034	0.0037
20	0.0007	0.0008	0.0009	0.0010	0.0011	0.0012	0.0014	0.0015	0.0017	0.0019
21	0.0003	0.0003	0.0004	0.0004	0.0005	0.0006	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009
22	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0004
23	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002
24	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001

تابع ملحق رقم (4b)

	λ									
X	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0010	0.0004	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0037	0.0018	0.0008	0.0004	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.0102	0.0053	0.0027	0.0013	0.0006	0.0003	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000
5	0.0224	0.0127	0.0070	0.0037	0.0019	0.0010	0.0005	0.0002	0.0001	0.0001
6	0.0411	0.0255	0.0152	0.0087	0.0048	0.0026	0.0014	0.0007	0.0004	0.0002
7	0.0646	0.0437	0.0281	0.0174	0.0104	0.0060	0.0034	0.0018	0.0010	0.0005
8	0.0888	0.0655	0.0457	0.0304	0.0194	0.0120	0.0072	0.0042	0.0024	0.0013
9	0.1085	0.0874	0.0661	0.0473	0.0324	0.0213	0.0135	0.0083	0.0050	0.0029
10	0.1194	0.1048	0.0859	0.0663	0.0486	0.0341	0.0230	0.0150	0.0095	0.0058
11	0.1194	0.1144	0.1015	0.0844	0.0663	0.0496	0.0355	0.0245	0.0164	0.0106
12	0.1094	0.1144	0.1099	0.0984	0.0829	0.0661	0.0504	0.0368	0.0259	0.0176
13	0.0926	0.1056	0.1099	0.1060	0.0956	0.0814	0.0658	0.0509	0.0378	0.0271
14	0.0728	0.0905	0.1021	0.1060	0.1024	0.0930	0.0800	0.0655	0.0514	0.0387
15	0.0534	0.0724	0.0885	0.0989	0.1024	0.0992	0.0906	0.0786	0.0650	0.0516
16	0.0367	0.0543	0.0719	0.0866	0.0960	0.0992	0.0963	0.0884	0.0772	0.0646
17	0.0237	0.0383	0.0550	0.0713	0.0847	0.0934	0.0963	0.0936	0.0863	0.0760
18	0.0145	0.0256	0.0397	0.0554	0.0706	0.0830	0.0909	0.0936	0.0911	0.0844
19	0.0084	0.0161	0.0272	0.0409	0.0557	0.0699	0.0814	0.0887	0.0911	0.0888
20	0.0046	0.0097	0.0177	0.0286	0.0418	0.0559	0.0692	0.0798	0.0866	0.0888
21	0.0024	0.0055	0.0109	0.0191	0.0299	0.0426	0.0560	0.0684	0.0783	0.0846
22	0.0012	0.0030	0.0065	0.0121	0.0204	0.0310	0.0433	0.0560	0.0676	0.0769
23	0.0006	0.0016	0.0037	0.0074	0.0133	0.0216	0.0320	0.0438	0.0559	0.0669
24	0.0003	0.0008	0.0020	0.0043	0.0083	0.0144	0.0226	0.0328	0.0442	0.0557
25	0.0001	0.0004	0.0010	0.0024	0.0050	0.0092	0.0154	0.0237	0.0336	0.0446
26	0.0000	0.0002	0.0005	0.0013	0.0029	0.0057	0.0101	0.0164	0.0246	0.0343
27	0.0000	0.0001	0.0002	0.0007	0.0016	0.0034	0.0063	0.0109	0.0173	0.0254
28	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0009	0.0019	0.0038	0.0070	0.0117	0.0181
29	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0004	0.0011	0.0023	0.0044	0.0077	0.0125
30	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0006	0.0013	0.0026	0.0049	0.0083
31	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0007	0.0015	0.0030	0.0054
32	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0004	0.0009	0.0018	0.0034
33	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0005	0.0010	0.0020
34	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0006	0.0012
35	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0007
36	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0004
37	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002
38	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
39	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001

ملحق رقم (5)



Appendix Table 5

Area in the Right Tail of a Chi-square (χ^2) Distribution

Example: In a chi-square distribution with 11 degrees of freedom, to find the chi-square value for 0.20 of the area under the curve (the colored area in the right tail) look under the 0.20 column in the table and the 11 degrees of freedom row; the appropriate chi-square value is 14.631.

Degrees of Freedom	Area in Right Tail				
	0.99	0.975	0.95	0.90	0.800
1	0.00016	0.00098	0.00398	0.0158	0.0642
2	0.0201	0.0506	0.103	0.211	0.446
3	0.115	0.216	0.352	0.584	1.005
4	0.297	0.484	0.711	1.064	1.649
5	0.554	0.831	1.145	1.610	2.343
6	0.872	1.237	1.635	2.204	3.070
7	1.239	1.690	2.167	2.833	3.822
8	1.646	2.180	2.733	3.490	4.594
9	2.088	2.700	3.325	4.168	5.380
10	2.558	3.247	3.940	4.865	6.179
11	3.053	3.816	4.575	5.578	6.989
12	3.571	4.404	5.226	6.304	7.807
13	4.107	5.009	5.892	7.042	8.634
14	4.660	5.629	6.571	7.790	9.467
15	5.229	6.262	7.261	8.547	10.307
16	5.812	6.908	7.962	9.312	11.152
17	6.408	7.564	8.672	10.085	12.002
18	7.015	8.231	9.390	10.865	12.857
19	7.633	8.907	10.117	11.651	13.716
20	8.260	9.591	10.851	12.443	14.578
21	8.897	10.283	11.591	13.240	15.445
22	9.542	10.982	12.338	14.041	16.314
23	10.196	11.689	13.091	14.848	17.187
24	10.856	12.401	13.848	15.658	18.062
25	11.524	13.120	14.611	16.473	18.940
26	12.198	13.844	15.379	17.292	19.820
27	12.879	14.573	16.151	18.114	20.703
28	13.565	15.308	16.928	18.939	21.588
29	14.256	16.047	17.708	19.768	22.475
30	14.953	16.791	18.493	20.599	23.364

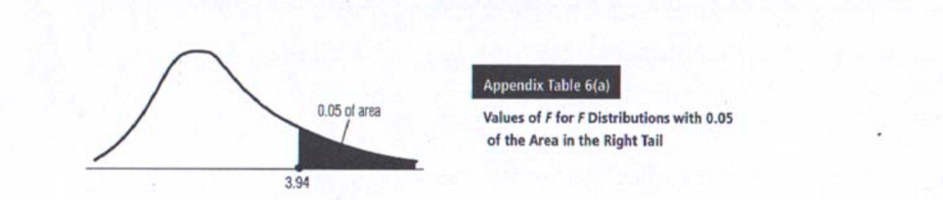
تابع ملحق رقم (5)

$$\chi^2_\alpha = \nu \left(1 - \frac{2}{9\nu} + z_\alpha \sqrt{\frac{2}{9\nu}}\right)^3$$

where z_α is the standard normal value (from Appendix Table 1) that leaves α of the area in the right tail.

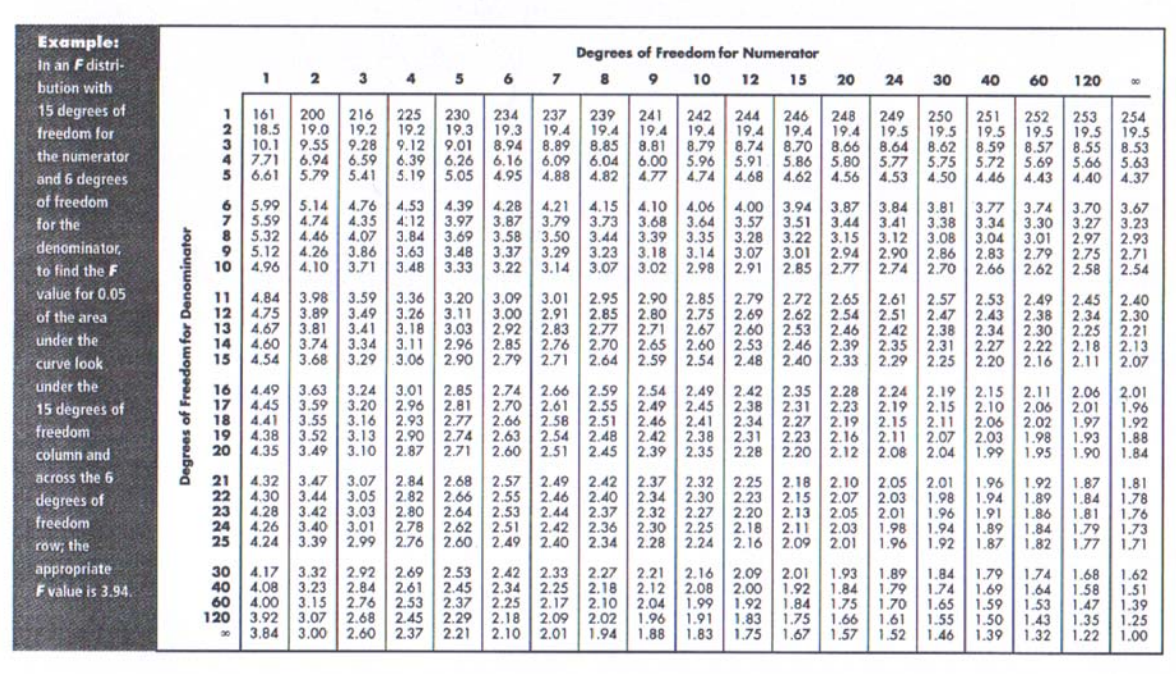
Area in Right Tail					Degrees of Freedom
0.20	0.10	0.05	0.025	0.01	
1.642	2.706	3.841	5.024	6.635	1
3.219	4.605	5.991	7.378	9.210	2
4.642	6.251	7.815	9.348	11.345	3
5.989	7.779	9.488	11.143	13.277	4
7.289	9.236	11.070	12.833	15.086	5
8.558	10.645	12.592	14.449	16.812	6
9.803	12.017	14.067	16.013	18.475	7
11.030	13.362	15.507	17.535	20.090	8
12.242	14.684	16.919	19.023	21.666	9
13.442	15.987	18.307	20.483	23.209	10
14.631	17.275	19.675	21.920	24.725	11
15.812	18.549	21.026	23.337	26.217	12
16.985	19.812	22.362	24.736	27.688	13
18.151	21.064	23.685	26.119	29.141	14
19.311	22.307	24.996	27.488	30.578	15
20.465	23.542	26.296	28.845	32.000	16
21.615	24.769	27.587	30.191	33.409	17
22.760	25.989	28.869	31.526	34.805	18
23.900	27.204	30.144	32.852	36.191	19
25.038	28.412	31.410	34.170	37.566	20
26.171	29.615	32.671	35.479	38.932	21
27.301	30.813	33.924	36.781	40.289	22
28.429	32.007	35.172	38.076	41.638	23
29.553	33.196	36.415	39.364	42.980	24
30.675	34.382	37.652	40.647	44.314	25
31.795	35.563	38.885	41.923	45.642	26
32.912	36.741	40.113	43.194	46.963	27
34.027	37.916	41.337	44.461	48.278	28
35.139	39.087	42.557	45.722	49.588	29
36.250	40.256	43.773	46.979	50.892	30

ملحق رقم (6a)



Appendix Table 6(a)

Values of *F* for *F* Distributions with 0.05 of the Area in the Right Tail

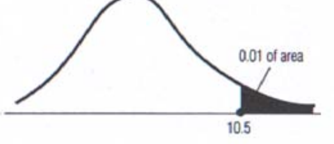


Example: In an *F* distribution with 15 degrees of freedom for the numerator and 6 degrees of freedom for the denominator, to find the *F* value for 0.05 of the area under the curve look under the 15 degrees of freedom column and across the 6 degrees of freedom row; the appropriate *F* value is 3.94.

Degrees of Freedom for Numerator (columns); Degrees of Freedom for Denominator (rows)

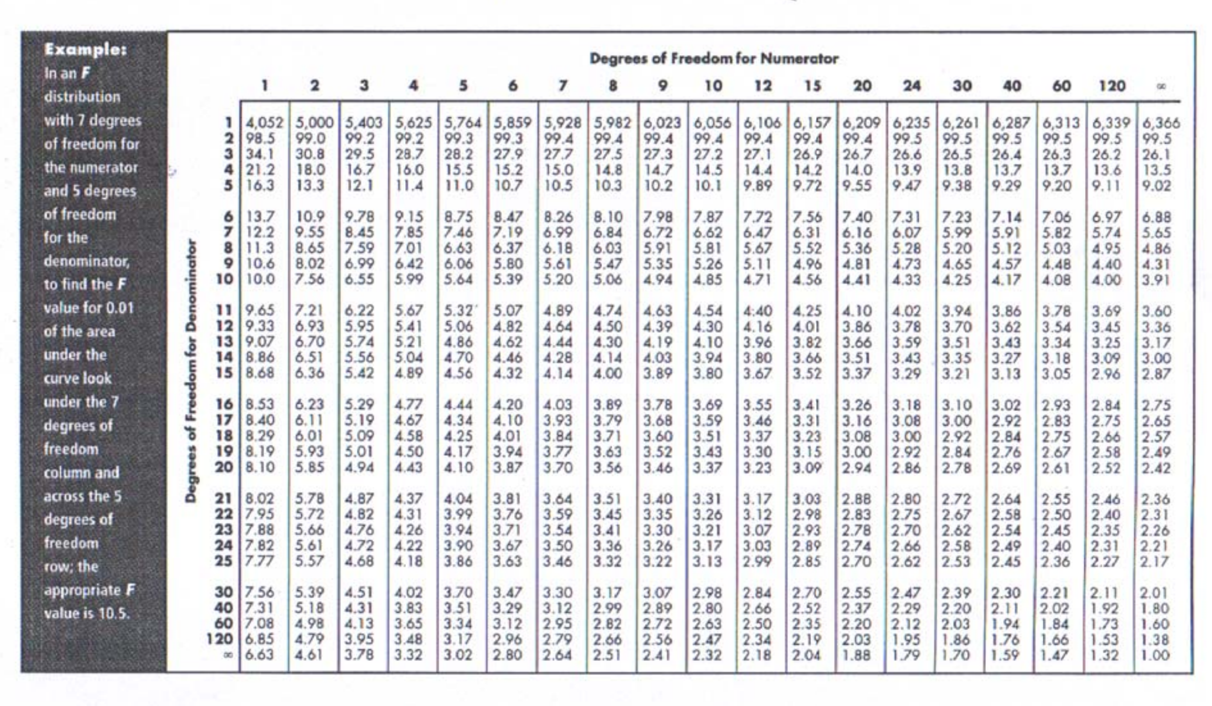
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	249	250	251	252	253	254
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.37
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

ملحق رقم (6b)



Appendix Table 6(b)

Values of F for F Distributions with 0.01 of the Area in the Right-Tail

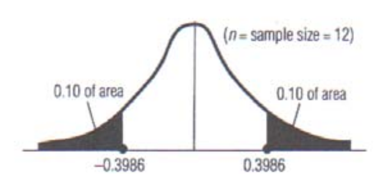


Example: In an F distribution with 7 degrees of freedom for the numerator and 5 degrees of freedom for the denominator, to find the F value for 0.01 of the area under the curve look under the 7 degrees of freedom column and across the 5 degrees of freedom row; the appropriate F value is 10.5.

Degrees of Freedom for Numerator (columns) / **Degrees of Freedom for Denominator** (rows)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	4,052	5,000	5,403	5,625	5,764	5,859	5,928	5,982	6,023	6,056	6,106	6,157	6,209	6,235	6,261	6,287	6,313	6,339	6,366
2	98.5	99.0	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5
3	34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.3	27.2	27.1	26.9	26.7	26.6	26.5	26.4	26.3	26.2	26.1
4	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7	14.5	14.4	14.2	14.0	13.9	13.8	13.7	13.7	13.6	13.5
5	16.3	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.2	10.1	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
6	13.7	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	12.2	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
9	10.6	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31
10	10.0	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.34	3.25	3.17
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.70	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75
17	8.40	6.11	5.19	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
19	8.19	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.86	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.53	2.45	2.36	2.27	2.17
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00

ملحق رقم (7)



Appendix Table 7

Values for Spearman's Rank Correlation (r_s) for Combined Areas in Both Tails

Example: For a two-tailed test of significance at the 0.20 level, with $n = 12$, the appropriate value for r_s can be found by looking under the 0.20 column and across the 12 row; the appropriate r_s value is 0.3986.

n	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.002
4	0.8000	0.8000				
5	0.7000	0.8000	0.9000	0.9000		
6	0.6000	0.7714	0.8286	0.8857	0.9429	
7	0.5357	0.6786	0.7450	0.8571	0.8929	0.9643
8	0.5000	0.6190	0.7143	0.8095	0.8571	0.9286
9	0.4667	0.5833	0.6833	0.7667	0.8167	0.9000
10	0.4424	0.5515	0.6364	0.7333	0.7818	0.8667
11	0.4182	0.5273	0.6091	0.7000	0.7455	0.8364
12	0.3986	0.4965	0.5804	0.6713	0.7273	0.8182
13	0.3791	0.4780	0.5549	0.6429	0.6978	0.7912
14	0.3626	0.4593	0.5341	0.6220	0.6747	0.7670
15	0.3500	0.4429	0.5179	0.6000	0.6536	0.7464
16	0.3382	0.4265	0.5000	0.5824	0.6324	0.7265
17	0.3260	0.4118	0.4853	0.5637	0.6152	0.7083
18	0.3148	0.3994	0.4716	0.5480	0.5975	0.6904
19	0.3070	0.3895	0.4579	0.5333	0.5825	0.6737
20	0.2977	0.3789	0.4451	0.5203	0.5684	0.6586
21	0.2909	0.3688	0.4351	0.5078	0.5545	0.6455
22	0.2829	0.3597	0.4241	0.4963	0.5426	0.6318
23	0.2767	0.3518	0.4150	0.4852	0.5306	0.6186
24	0.2704	0.3435	0.4061	0.4748	0.5200	0.6070
25	0.2646	0.3362	0.3977	0.4654	0.5100	0.5962
26	0.2588	0.3299	0.3894	0.4564	0.5002	0.5856
27	0.2540	0.3236	0.3822	0.4481	0.4915	0.5757
28	0.2490	0.3175	0.3749	0.4401	0.4828	0.5660
29	0.2443	0.3113	0.3685	0.4320	0.4744	0.5567
30	0.2400	0.3059	0.3620	0.4251	0.4665	0.5479

ملحق رقم (8)
قيم (t) لدونت (Dunnett)

Error df	P	p = number of treatment means, excluding control								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	.95	2.57	3.03	3.39	3.66	3.88	4.06	4.22	4.36	4.49
	.99	4.03	4.63	5.09	5.44	5.73	5.97	6.18	6.36	6.53
6	.95	2.45	2.86	3.18	3.41	3.60	3.75	3.88	4.00	4.11
	.99	3.71	4.22	4.60	4.88	5.11	5.30	5.47	5.61	5.74
7	.95	2.36	2.75	3.04	3.24	3.41	3.54	3.66	3.76	3.86
	.99	3.50	3.95	4.28	4.52	4.71	4.87	5.01	5.13	5.24
8	.95	2.31	2.67	2.94	3.13	3.28	3.40	3.51	3.60	3.68
	.99	3.36	3.77	4.06	4.27	4.44	4.58	4.70	4.81	4.90
9	.95	2.26	2.61	2.86	3.04	3.18	3.29	3.39	3.48	3.55
	.99	3.25	3.63	3.90	4.09	4.24	4.37	4.48	4.57	4.65
10	.95	2.23	2.57	2.81	2.97	3.11	3.21	3.31	3.39	3.46
	.99	3.17	3.53	3.78	3.95	4.10	4.21	4.31	4.40	4.47
11	.95	2.20	2.53	2.76	2.92	3.05	3.15	3.24	3.31	3.38
	.99	3.11	3.45	3.68	3.85	3.98	4.09	4.18	4.26	4.33
12	.95	2.18	2.50	2.72	2.88	3.00	3.10	3.18	3.25	3.32
	.99	3.05	3.39	3.61	3.76	3.89	3.99	4.08	4.15	4.22
13	.95	2.16	2.48	2.69	2.84	2.96	3.06	3.14	3.21	3.27
	.99	3.01	3.33	3.54	3.69	3.81	3.91	3.99	4.06	4.13
14	.95	2.14	2.46	2.67	2.81	2.93	3.02	3.10	3.17	3.23
	.99	2.98	3.29	3.49	3.64	3.75	3.84	3.92	3.99	4.05
15	.95	2.13	2.44	2.64	2.79	2.90	2.99	3.07	3.13	3.19
	.99	2.95	3.25	3.45	3.59	3.70	3.79	3.86	3.93	3.99
16	.95	2.12	2.42	2.63	2.77	2.88	2.96	3.04	3.10	3.16
	.99	2.92	3.22	3.41	3.55	3.65	3.74	3.82	3.88	3.93
17	.95	2.11	2.41	2.61	2.75	2.85	2.94	3.01	3.08	3.13
	.99	2.90	3.19	3.38	3.51	3.62	3.70	3.77	3.83	3.89
18	.95	2.10	2.40	2.59	2.73	2.84	2.92	2.99	3.05	3.11
	.99	2.88	3.17	3.35	3.48	3.58	3.67	3.74	3.80	3.85
19	.95	2.09	2.39	2.58	2.72	2.82	2.90	2.97	3.04	3.09
	.99	2.86	3.15	3.33	3.46	3.55	3.64	3.70	3.76	3.81
20	.95	2.09	2.38	2.57	2.70	2.81	2.89	2.96	3.02	3.07
	.99	2.85	3.13	3.31	3.43	3.53	3.61	3.67	3.73	3.78
24	.95	2.06	2.35	2.53	2.66	2.76	2.84	2.91	2.96	3.01
	.99	2.80	3.07	3.24	3.36	3.45	3.52	3.58	3.64	3.69
30	.95	2.04	2.32	2.50	2.62	2.72	2.79	2.86	2.91	2.96
	.99	2.75	3.01	3.17	3.28	3.37	3.44	3.50	3.55	3.59
40	.95	2.02	2.29	2.47	2.58	2.67	2.75	2.81	2.86	2.90
	.99	2.70	2.95	3.10	3.21	3.29	3.36	3.41	3.46	3.50
60	.95	2.00	2.27	2.43	2.55	2.63	2.70	2.76	2.81	2.85
	.99	2.66	2.90	3.04	3.14	3.22	3.28	3.33	3.38	3.42
120	.95	1.98	2.24	2.40	2.51	2.59	2.66	2.71	2.76	2.80
	.99	2.62	2.84	2.98	3.08	3.15	3.21	3.25	3.30	3.33
∞	.95	1.96	2.21	2.37	2.47	2.55	2.62	2.67	2.71	2.75
	.99	2.58	2.79	2.92	3.01	3.08	3.14	3.18	3.22	3.25

ملحق رقم (9)

قيم (SSR) لدنكن SSR (Duncan)

Error df	Protection level	p = number of means for range being tested													
		2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	18	20
1	.05	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0
	.01	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0
2	.05	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09
	.01	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0
3	.05	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50
	.01	8.26	8.5	8.6	8.7	8.8	8.9	8.9	9.0	9.0	9.0	9.1	9.2	9.3	9.3
4	.05	3.93	4.01	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02
	.01	6.51	6.8	6.9	7.0	7.1	7.1	7.2	7.2	7.3	7.3	7.4	7.4	7.5	7.5
5	.05	3.64	3.74	3.79	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83
	.01	5.70	5.96	6.11	6.18	6.26	6.33	6.40	6.44	6.5	6.6	6.6	6.7	6.7	6.8
6	.05	3.46	3.58	3.64	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68
	.01	5.24	5.51	5.65	5.73	5.81	5.88	5.95	6.00	6.0	6.1	6.2	6.2	6.3	6.3
7	.05	3.35	3.47	3.54	3.58	3.60	3.61	3.61	3.61	3.61	3.61	3.61	3.61	3.61	3.61
	.01	4.95	5.22	5.37	5.45	5.53	5.61	5.69	5.73	5.8	5.8	5.9	5.9	6.0	6.0
8	.05	3.26	3.39	3.47	3.52	3.55	3.56	3.56	3.56	3.56	3.56	3.56	3.56	3.56	3.56
	.01	4.74	5.00	5.14	5.23	5.32	5.40	5.47	5.51	5.5	5.6	5.7	5.7	5.8	5.8
9	.05	3.20	3.34	3.41	3.47	3.50	3.52	3.52	3.52	3.52	3.52	3.52	3.52	3.52	3.52
	.01	4.60	4.86	4.99	5.08	5.17	5.25	5.32	5.36	5.4	5.5	5.5	5.6	5.7	5.7
10	.05	3.15	3.30	3.37	3.43	3.46	3.47	3.47	3.47	3.47	3.47	3.47	3.47	3.47	3.48
	.01	4.48	4.73	4.88	4.96	5.06	5.13	5.20	5.24	5.28	5.36	5.42	5.48	5.54	5.55
11	.05	3.11	3.27	3.35	3.39	3.43	3.44	3.45	3.46	4.46	3.46	3.46	3.46	3.47	3.48
	.01	4.39	4.63	4.77	4.86	4.94	5.01	5.06	5.12	5.15	5.24	5.28	5.34	5.38	5.39
12	.05	3.08	3.23	3.33	3.36	3.40	3.42	3.44	3.44	3.46	3.46	3.46	3.46	3.47	3.48
	.01	4.32	4.55	4.68	4.76	4.84	4.92	4.96	5.02	5.07	5.13	5.17	5.22	5.24	5.26
13	.05	3.06	3.21	3.30	3.35	3.38	3.41	3.42	3.44	3.45	3.45	3.46	3.46	3.47	3.47
	.01	4.26	4.48	4.62	4.69	4.74	4.84	4.88	4.94	4.98	5.04	5.08	5.13	5.14	5.15
14	.05	3.03	3.18	3.27	3.33	3.37	3.39	3.41	3.42	3.44	3.45	3.46	3.46	3.47	3.47
	.01	4.21	4.42	4.55	4.63	4.70	4.78	4.83	4.87	4.91	4.96	5.00	5.04	5.06	5.07
15	.05	3.01	3.16	3.25	3.31	3.36	3.38	3.40	3.42	3.43	3.44	3.45	3.46	3.47	3.47
	.01	4.17	4.37	4.50	4.58	4.64	4.72	4.77	4.81	4.84	4.90	4.94	4.97	4.99	5.00

تابع ملحق رقم (9)

Error df	Protection level	p = number of means for range being tested													
		2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	18	20
16	.05	3.00	3.15	3.23	3.30	3.34	3.37	3.39	3.41	3.43	3.44	3.45	3.46	3.47	3.47
	.01	4.13	4.34	4.45	4.54	4.60	4.67	4.72	4.76	4.79	4.84	4.88	4.91	4.93	4.94
17	.05	2.98	3.13	3.22	3.28	3.33	3.36	3.38	3.40	3.42	3.44	3.45	3.46	3.47	3.47
	.01	4.10	4.30	4.41	4.50	4.56	4.63	4.68	4.72	4.75	4.80	4.83	4.86	4.88	4.89
18	.05	2.97	3.12	3.21	3.27	3.32	3.35	3.37	3.39	3.41	3.43	3.45	3.46	3.47	3.47
	.01	4.07	4.27	4.38	4.46	4.53	4.59	4.64	4.68	4.71	4.76	4.79	4.82	4.84	4.85
19	.05	2.96	3.11	3.19	3.26	3.31	3.35	3.37	3.39	3.41	3.43	3.44	3.46	3.47	3.47
	.01	4.05	4.24	4.35	4.43	4.50	4.56	4.61	4.64	4.67	4.72	4.76	4.79	4.81	4.82
20	.05	2.95	3.10	3.18	3.25	3.30	3.34	3.36	3.38	3.40	3.43	3.44	3.46	3.46	3.47
	.01	4.02	4.22	4.33	4.40	4.47	4.53	4.58	4.61	4.65	4.69	4.73	4.76	4.78	4.79
22	.05	2.93	3.08	3.17	3.24	3.29	3.32	3.35	3.37	3.39	3.42	3.44	3.45	3.46	3.47
	.01	3.99	4.17	4.28	4.36	4.42	4.48	4.53	4.57	4.60	4.65	4.68	4.71	4.74	4.75
24	.05	2.92	3.07	3.15	3.22	3.28	3.31	3.34	3.37	3.38	3.41	3.44	3.45	3.46	3.47
	.01	3.96	4.14	4.24	4.33	4.39	4.44	4.49	4.53	4.57	4.62	4.64	4.67	4.70	4.72
26	.05	2.91	3.06	3.14	3.21	3.27	3.30	3.34	3.36	3.38	3.41	3.43	3.45	3.46	3.47
	.01	3.93	4.11	4.21	4.30	4.36	4.41	4.46	4.50	4.53	4.58	4.62	4.65	4.67	4.69
28	.05	2.90	3.04	3.13	3.20	3.26	3.30	3.33	3.35	3.37	3.40	3.43	3.45	3.46	3.47
	.01	3.91	4.08	4.18	4.28	4.34	4.39	4.43	4.47	4.51	4.56	4.60	4.62	4.65	4.67
30	.05	2.89	3.04	3.12	3.20	3.25	3.29	3.32	3.35	3.37	3.40	3.43	3.44	3.46	3.47
	.01	3.89	4.06	4.16	4.22	4.32	4.36	4.41	4.45	4.48	4.54	4.58	4.61	4.63	4.65
40	.05	2.86	3.01	3.10	3.17	3.22	3.27	3.30	3.33	3.35	3.39	3.42	3.44	3.46	3.47
	.01	3.82	3.99	4.10	4.17	4.24	4.30	4.34	4.37	4.41	4.46	4.51	4.54	4.57	4.59
60	.05	2.83	2.98	3.08	3.14	3.20	3.24	3.28	3.31	3.33	3.37	3.40	3.43	3.45	3.47
	.01	3.76	3.92	4.03	4.12	4.17	4.23	4.27	4.31	4.34	4.39	4.44	4.47	4.50	4.53
100	.05	2.80	2.95	3.05	3.12	3.18	3.22	3.26	3.29	3.32	3.36	3.40	3.42	3.45	3.47
	.01	3.71	3.86	3.98	4.06	4.11	4.17	4.21	4.25	4.29	4.35	4.38	4.42	4.45	4.48
∞	.05	2.77	2.92	3.02	3.09	3.15	3.19	3.23	3.26	3.29	3.34	3.38	3.41	3.44	3.47
	.01	3.64	3.80	3.90	3.98	4.04	4.09	4.14	4.17	4.20	4.26	4.31	4.34	4.38	4.41

ملحق رقم (10)

قيم (Q_k) لـ (Tukey) و (Newman-Keul)

Error *df*	α	*p* = number of									
		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
5	.05	3.64	4.60	5.22	5.67	6.03	6.33	6.58	6.80	6.99	7.17
	.01	5.70	6.97	7.80	8.42	8.91	9.32	9.67	9.97	10.24	10.48
6	.05	3.46	4.34	4.90	5.31	5.63	5.89	6.12	6.32	6.49	6.65
	.01	5.24	6.33	7.03	7.56	7.97	8.32	8.61	8.87	9.10	9.30
7	.05	3.34	4.16	4.68	5.06	5.36	5.61	5.82	6.00	6.16	6.30
	.01	4.95	5.92	6.54	7.01	7.37	7.68	7.94	8.17	8.37	8.55
8	.05	3.26	4.04	4.53	4.89	5.17	5.40	5.60	5.77	5.92	6.05
	.01	4.74	5.63	6.20	6.63	6.96	7.24	7.47	7.68	7.87	8.03
9	.05	3.20	3.95	4.42	4.76	5.02	5.24	5.43	5.60	5.74	5.87
	.01	4.60	5.43	5.96	6.35	6.66	6.91	7.13	7.32	7.49	7.65
10	.05	3.15	3.88	4.33	4.65	4.91	5.12	5.30	5.46	5.60	5.72
	.01	4.48	5.27	5.77	6.14	6.43	6.67	6.87	7.05	7.21	7.36
11	.05	3.11	3.82	4.26	4.57	4.82	5.03	5.20	5.35	5.49	5.61
	.01	4.39	5.14	5.62	5.97	6.25	6.48	6.67	6.84	6.99	7.13
12	.05	3.08	3.77	4.20	4.51	4.75	4.95	5.12	5.27	5.40	5.51
	.01	4.32	5.04	5.50	5.84	6.10	6.32	6.51	6.67	6.81	6.94
13	.05	3.06	3.73	4.15	4.45	4.69	4.88	5.05	5.19	5.32	5.43
	.01	4.26	4.96	5.40	5.73	5.98	6.19	6.37	6.53	6.67	6.79
14	.05	3.03	3.70	4.11	4.41	4.64	4.83	4.99	5.13	5.25	5.36
	.01	4.21	4.89	5.32	5.63	5.88	6.08	6.26	6.41	6.54	6.66
15	.05	3.01	3.67	4.08	4.37	4.60	4.78	4.94	5.08	5.20	5.31
	.01	4.17	4.83	5.25	5.56	5.80	5.99	6.16	6.31	6.44	6.55
16	.05	3.00	3.65	4.05	4.33	4.56	4.74	4.90	5.03	5.15	5.26
	.01	4.13	4.78	5.19	5.49	5.72	5.92	6.08	6.22	6.35	6.46
17	.05	2.98	3.63	4.02	4.30	4.52	4.71	4.86	4.99	5.11	5.21
	.01	4.10	4.74	5.14	5.43	5.66	5.85	6.01	6.15	6.27	6.38
18	.05	2.97	3.61	4.00	4.28	4.49	4.67	4.82	4.96	5.07	5.17
	.01	4.07	4.70	5.09	5.38	5.60	5.79	5.94	6.08	6.20	6.31
19	.05	2.96	3.59	3.98	4.25	4.47	4.65	4.79	4.92	5.04	5.14
	.01	4.05	4.67	5.05	5.33	5.55	5.73	5.89	6.02	6.14	6.25
20	.05	2.95	3.58	3.96	4.23	4.45	4.62	4.77	4.90	5.01	5.11
	.01	4.02	4.64	5.02	5.29	5.51	5.69	5.84	5.97	6.09	6.19
24	.05	2.92	3.53	3.90	4.17	4.37	4.54	4.68	4.81	4.92	5.01
	.01	3.96	4.54	4.91	5.17	5.37	5.54	5.69	5.81	5.92	6.02
30	.05	2.89	3.49	3.84	4.10	4.30	4.46	4.60	4.72	4.83	4.92
	.01	3.89	4.45	4.80	5.05	5.24	5.40	5.54	5.65	5.76	5.85
40	.05	2.86	3.44	3.79	4.04	4.23	4.39	4.52	4.63	4.74	4.82
	.01	3.82	4.37	4.70	4.93	5.11	5.27	5.39	5.50	5.60	5.69
60	.05	2.83	3.40	3.74	3.98	4.16	4.31	4.44	4.55	4.65	4.73
	.01	3.76	4.28	4.60	4.82	4.99	5.13	5.25	5.36	5.45	5.53
120	.05	2.80	3.36	3.69	3.92	4.10	4.24	4.36	4.48	4.56	4.64
	.01	3.70	4.20	4.50	4.71	4.87	5.01	5.12	5.21	5.30	5.38
∞	.05	2.77	3.31	3.63	3.86	4.03	4.17	4.29	4.39	4.47	4.55
	.01	3.64	4.12	4.40	4.60	4.76	4.88	4.99	5.08	5.16	5.23

تابع ملحق رقم (10)

treatment means									α	Error df
12	13	14	15	16	17	18	19	20		
7.32	7.47	7.60	7.72	7.83	7.93	8.03	8.12	8.21	.05	5
10.70	10.89	11.08	11.24	11.40	11.55	11.68	11.81	11.93	.01	
6.79	6.92	7.03	7.14	7.24	7.34	7.43	7.51	7.59	.05	6
9.49	9.65	9.81	9.95	10.08	10.21	10.32	10.43	10.54	.01	
6.43	6.55	6.66	6.76	6.85	6.94	7.02	7.09	7.17	.05	7
8.71	8.86	9.00	9.12	9.24	9.35	9.46	9.55	9.65	.01	
6.18	6.29	6.39	6.48	6.57	6.65	6.73	6.80	6.87	.05	8
8.18	8.31	8.44	8.55	8.66	8.76	8.85	8.94	9.03	.01	
5.98	6.09	6.19	6.28	6.36	6.44	6.51	6.58	6.64	.05	9
7.78	7.91	8.03	8.13	8.23	8.32	8.41	8.49	8.57	.01	
5.83	5.93	6.03	6.11	6.20	6.27	6.34	6.40	6.47	.05	10
7.48	7.60	7.71	7.81	7.91	7.99	8.07	8.15	8.22	.01	
5.71	5.81	5.90	5.99	6.06	6.14	6.20	6.26	6.33	.05	11
7.25	7.36	7.46	7.56	7.65	7.73	7.81	7.88	7.95	.01	
5.62	5.71	5.80	5.88	5.95	6.03	6.09	6.15	6.21	.05	12
7.06	7.17	7.26	7.36	7.44	7.52	7.59	7.66	7.73	.01	
5.53	5.63	5.71	5.79	5.86	5.93	6.00	6.05	6.11	.05	13
6.90	7.01	7.10	7.19	7.27	7.34	7.42	7.48	7.55	.01	
5.46	5.55	5.64	5.72	5.79	5.85	5.92	5.97	6.03	.05	14
6.77	6.87	6.96	7.05	7.12	7.20	7.27	7.33	7.39	.01	
5.40	5.49	5.58	5.65	5.72	5.79	5.85	5.90	5.96	.05	15
6.66	6.76	6.84	6.93	7.00	7.07	7.14	7.20	7.26	.01	
5.35	5.44	5.52	5.59	5.66	5.72	5.79	5.84	5.90	05	16
6.56	6.66	6.74	6.82	6.90	6.97	7.03	7.09	7.15	.01	
5.31	5.39	5.47	5.55	5.61	5.68	5.74	5.79	5.84	.05	17
6.48	6.57	6.66	6.73	6.80	6.87	6.94	7.00	7.05	.01	
5.27	5.35	5.43	5.50	5.57	5.63	5.69	5.74	5.79	.05	18
6.41	6.50	6.58	6.65	6.72	6.79	6.85	6.91	6.96	.01	
5.23	5.32	5.39	5.46	5.53	5.59	5.65	5.70	5.75	.05	19
6.34	6.43	6.51	6.58	6.65	6.72	6.78	6.84	6.89	.01	
5.20	5.28	5.36	5.43	5.49	5.55	5.61	5.66	5.71	.05	20
6.29	6.37	6.45	6.52	6.59	6.65	6.71	6.76	6.82	.01	
5.10	5.18	5.25	5.32	5.38	5.44	5.50	5.54	5.59	.05	24
6.11	6.19	6.26	6.33	6.39	6.45	6.51	6.56	6.61	.01	
5.00	5.08	5.15	5.21	5.27	5.33	5.38	5.43	5.48	.05	30
5.93	6.01	6.08	6.14	6.20	6.26	6.31	6.36	6.41	.01	
4.91	4.98	5.05	5.11	5.16	5.22	5.27	5.31	5.36	.05	40
5.77	5.84	5.90	5.96	6.02	6.07	6.12	6.17	6.21	.01	
4.81	4.88	4.94	5.00	5.06	5.11	5.16	5.20	5.24	.05	60
5.60	5.67	5.73	5.79	5.84	5.89	5.93	5.98	6.02	.01	
4.72	4.78	4.84	4.90	4.95	5.00	5.05	5.09	5.13	.05	120
5.44	5.51	5.56	5.61	5.66	5.71	5.75	5.79	5.83	.01	
4.62	4.68	4.74	4.80	4.85	4.89	4.93	4.97	5.01	.05	∞
5.29	5.35	5.40	5.45	5.49	5.54	5.57	5.61	5.65	.01	

ملحق رقم (11)

القيم الحرجة لاختبار ولكوكسن لاشارة الرتب

Sample size n	Significance level, α One-tailed	Significance level, α Two-tailed	Critical value W_L	Critical value W_U
7	0.01	0.02	0	28
	0.025	0.05	2	26
	0.05	0.10	4	24
	0.10	0.20	6	22
8	0.005	0.01	0	36
	0.01	0.02	2	34
	0.025	0.05	4	32
	0.05	0.10	6	30
	0.10	0.20	8	28
9	0.005	0.01	2	43
	0.01	0.02	3	42
	0.025	0.05	6	39
	0.05	0.10	8	37
	0.10	0.20	11	34
10	0.005	0.01	3	52
	0.01	0.02	5	50
	0.025	0.05	8	47
	0.05	0.10	11	44
	0.10	0.20	14	41
11	0.005	0.01	5	61
	0.01	0.02	7	59
	0.025	0.05	11	55
	0.05	0.10	14	52
	0.10	0.20	18	48
12	0.005	0.01	7	71
	0.01	0.02	10	68
	0.025	0.05	14	64
	0.05	0.10	17	61
	0.10	0.20	22	56
13	0.005	0.01	10	81
	0.01	0.02	13	78
	0.025	0.05	17	74
	0.05	0.10	21	70
	0.10	0.20	26	65

ملحق رقم (12)

القيم الحرجة لاختبار ولكوكسن لمجموع الرتب

Critical Values of T_L and T_U for the Wilcoxon Rank Sum Test: Independent Samples

Test statistic is the rank sum associated with the smaller sample (if equal sample sizes, either rank sum can be used).

a. α = .025 one-tailed; α = .05 two-tailed

n_2 \ n_1	3		4		5		6		7		8		9		10	
	T_L	T_U	T_L	T_U	T_L	T_U	T_L	T_U	T_L	T_U	T_L	T_U	T_L	T_U	T_L	T_U
3	5	16	6	18	6	21	7	23	7	26	8	28	8	31	9	33
4	6	18	11	25	12	28	12	32	13	35	14	38	15	41	16	44
5	6	21	12	28	18	37	19	41	20	45	21	49	22	53	24	56
6	7	23	12	32	19	41	26	52	28	56	29	61	31	65	32	70
7	7	26	13	35	20	45	28	56	37	68	39	73	41	78	43	83
8	8	28	14	38	21	49	29	61	39	73	49	87	51	93	54	98
9	8	31	15	41	22	53	31	65	41	78	51	93	63	108	66	114
10	9	33	16	44	24	56	32	70	43	83	54	98	66	114	79	131

b. α = .05 one-tailed; α = .10 two-tailed

n_2 \ n_1	3		4		5		6		7		8		9		10	
	T_L	T_U	T_L	T_U	T_L	T_U	T_L	T_U	T_L	T_U	T_L	T_U	T_L	T_U	T_L	T_U
3	6	15	7	7	7	20	8	22	9	24	9	27	10	29	11	31
4	7	17	12	24	13	27	14	30	15	33	16	36	17	39	18	42
5	7	20	13	27	19	36	20	40	22	43	24	46	25	50	26	54
6	8	22	14	30	20	40	28	50	30	54	32	58	33	63	35	67
7	9	24	15	33	22	43	30	54	39	66	41	71	43	76	46	80
8	9	27	16	36	24	46	32	58	41	71	52	84	54	90	57	95
9	10	29	17	39	25	50	33	63	43	76	54	90	66	105	69	111
10	11	31	18	42	26	54	35	67	46	80	57	95	69	111	83	127

Source: From F. Wilcoxon and R. A. Wilcox, "Some Rapid Approximate Statistical Procedures," 1964, 20–23. Reproduced with the permission of American Cyanamid Company.

ملحق رقم (13)

قيم اختبار مان - وتني

n	p	$m = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	.001	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	.005	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
2	.01	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2
	.025	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3
	.05	0	0	0	1	1	1	2	2	2	2	3	3	4	4	4	4	5	5	5
	.10	0	1	1	2	2	2	3	3	4	4	5	5	5	6	6	7	7	8	8
	.001	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
	.005	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3	3	3	4	4
3	.01	0	0	0	0	0	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	5	5	5	6
	.025	0	0	0	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9
	.05	0	1	1	2	3	3	4	5	5	6	6	7	8	8	9	10	10	11	12
	.10	1	2	2	3	4	5	6	6	7	8	9	10	11	11	12	13	14	15	16
	.001	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3	4	4	4
	.005	0	0	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	6	6	7	7	8	9
4	.01	0	0	0	1	2	2	3	4	4	5	6	6	7	9	8	9	10	10	11
	.025	0	0	1	2	3	4	5	5	6	7	8	9	10	11	12	12	13	14	15
	.05	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	15	16	17	18	19
	.10	1	2	4	5	6	7	8	10	11	12	13	14	16	17	18	19	21	22	23
	.001	0	0	0	0	0	0	1	2	2	3	3	4	4	5	6	6	7	8	8
	.005	0	0	0	1	2	2	3	4	5	6	7	8	8	9	10	11	12	13	14
5	.01	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
	.025	0	1	2	3	4	6	7	8	9	10	12	13	14	15	16	18	19	20	21
	.05	1	2	3	5	6	7	9	10	12	13	14	16	17	19	20	21	23	24	26
	.10	2	3	5	6	8	9	11	13	14	16	18	19	21	23	24	26	28	29	31

تابع ملحق رقم (13)

n	p	$m = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	.001	0	0	0	0	0	0	2	3	4	5	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	.005	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	10	11	12	13	14	16	17	18	19
6	.01	0	0	2	3	4	5	7	8	9	10	12	13	14	16	17	19	20	21	23
	.025	0	2	3	4	6	7	9	11	12	14	15	17	18	20	22	23	25	26	28
	.05	1	3	4	6	8	9	11	13	15	17	18	20	22	24	26	27	29	31	33
	.10	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	35	37	39
	.001	0	0	0	0	1	2	3	4	6	7	8	9	10	11	12	14	15	16	17
	.005	0	0	1	2	4	5	7	8	10	11	13	14	16	17	19	20	22	23	25
7	.01	0	1	2	4	5	7	8	10	12	13	15	17	18	20	22	24	25	27	29
	.025	0	2	4	6	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35
	.05	1	3	5	7	9	12	14	16	18	20	22	25	27	29	31	34	36	38	40
	.10	2	5	7	9	12	14	17	19	22	24	27	29	32	34	37	39	42	44	47
	.001	0	0	0	1	2	3	5	6	7	9	10	12	13	15	16	18	19	21	22
	.005	0	0	2	3	5	7	8	10	12	14	16	18	19	21	23	25	27	29	31
8	.01	0	1	3	5	7	8	10	12	14	16	18	21	23	25	27	29	31	33	35
	.025	1	3	5	7	9	11	14	16	18	20	23	25	27	30	32	35	37	39	42
	.05	2	4	6	9	11	14	16	19	21	24	27	29	32	34	37	40	42	45	48
	.10	3	6	8	11	14	17	20	23	25	28	31	34	37	40	43	46	49	52	55
	.001	0	0	0	2	3	4	6	8	9	11	13	15	16	18	20	22	24	26	27
	.005	0	1	2	4	6	8	10	12	14	17	19	21	23	25	28	30	32	34	37
9	.01	0	2	4	6	8	10	12	15	17	19	22	24	27	29	32	34	37	39	41
	.025	1	3	5	8	11	13	16	18	21	24	27	29	32	35	38	40	43	46	49
	.05	2	5	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	40	43	46	49	52	55
	.10	3	6	10	13	16	19	23	26	29	32	36	39	42	46	49	53	56	59	63
	.001	0	0	1	2	4	6	7	9	11	13	15	18	20	22	24	26	28	30	33
	.005	0	1	3	5	7	10	12	14	17	19	22	25	27	30	32	35	38	40	43
10	.01	0	2	4	7	9	12	14	17	20	23	25	28	31	34	37	39	42	45	48
	.025	1	4	6	9	12	15	18	21	24	27	30	34	37	40	43	46	49	53	46
	.05	2	5	8	12	15	18	21	25	28	32	35	38	42	45	49	52	56	59	63
	.10	4	7	11	14	18	22	25	29	33	37	40	44	48	52	55	59	63	67	71

تابع ملحق رقم (13)

n	p	$m = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	.001	0	0	1	3	5	7	9	11	13	16	18	21	23	25	28	30	33	35	38
	.005	0	1	3	6	8	11	14	17	19	22	25	28	31	34	37	40	43	46	49
11	.01	0	2	5	8	10	13	16	19	23	26	29	32	35	38	42	45	48	51	54
	.025	1	4	7	10	14	17	20	24	27	31	34	38	41	45	48	52	56	59	63
	.05	2	6	9	13	17	20	24	28	32	35	39	43	47	51	55	58	62	66	70
	.10	4	8	12	16	20	24	28	32	37	41	45	49	53	58	62	66	70	74	79
	.001	0	0	1	3	5	8	10	13	15	18	21	24	26	29	32	35	38	41	43
	.005	0	2	4	7	10	13	16	19	22	25	28	32	35	38	42	45	48	52	55
12	.01	0	3	6	9	12	15	18	22	25	29	32	36	39	43	47	50	54	57	61
	.025	2	5	8	12	15	19	23	27	30	34	38	42	46	50	54	58	62	66	70
	.05	3	6	10	14	18	22	27	31	35	39	43	48	52	56	61	65	69	73	78
	.10	5	9	13	18	22	27	31	36	40	45	50	54	59	64	68	73	78	82	87
	.001	0	0	2	4	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	43	46	49
	.005	0	2	4	8	11	14	18	21	25	28	32	35	39	43	46	50	54	58	61
13	.01	1	3	6	10	13	17	21	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68
	.025	2	5	9	13	17	21	25	29	34	38	42	46	51	55	60	64	68	73	77
	.05	3	7	11	16	20	25	29	34	38	43	48	52	57	62	66	71	76	81	85
	.10	5	10	14	19	24	29	34	39	44	49	54	59	64	69	75	80	85	90	95
	.001	0	0	2	4	7	10	13	16	20	23	26	30	33	37	40	44	47	51	55
	.005	0	2	5	8	12	16	19	23	27	31	35	39	43	47	51	55	59	64	68
14	.01	1	3	7	11	14	18	23	27	31	35	39	44	48	52	57	61	66	70	74
	.025	2	6	10	14	18	23	27	32	37	41	46	51	56	60	65	70	75	79	84
	.05	4	8	12	17	22	27	32	37	42	47	52	57	62	67	72	78	83	88	93
	.10	5	11	16	21	26	32	37	42	48	53	59	64	70	75	81	86	92	98	103
	.001	0	0	2	5	8	11	15	18	22	25	29	33	37	41	44	48	52	56	60
	.005	0	3	6	9	13	17	21	25	30	34	38	43	47	52	56	61	65	70	74
15	.01	1	4	8	12	16	20	25	29	34	38	43	48	52	57	62	67	71	76	81
	.025	2	6	11	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	71	76	81	86	91
	.05	4	8	13	19	24	29	34	40	45	51	56	62	67	73	78	84	89	95	101
	.10	6	11	17	23	28	34	40	46	52	58	64	69	75	81	87	93	99	105	111

تابع ملحق رقم (13)

n	p	$m=2$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	.001	0	0	3	6	9	12	16	20	24	28	32	36	40	44	49	53	57	61	66
	.005	0	3	6	10	14	19	23	28	32	37	42	46	51	56	61	66	71	75	80
16	.01	1	4	8	13	17	22	27	32	37	42	47	52	57	62	67	72	77	83	88
	.025	2	7	12	16	22	27	32	38	43	48	54	60	65	71	76	82	87	93	99
	.05	4	9	15	20	26	31	37	43	49	55	61	66	72	78	84	90	96	102	108
	.10	6	12	18	24	30	37	43	49	55	62	68	75	81	87	94	100	107	113	120
	.001	0	1	3	6	10	14	18	22	26	30	35	39	44	48	53	58	62	67	71
	.005	0	3	7	11	16	20	25	30	35	40	45	50	55	61	66	71	76	82	87
17	.01	1	5	9	14	19	24	29	34	39	45	50	56	61	67	72	78	83	89	94
	.025	3	7	12	18	23	29	35	40	46	52	58	64	70	76	82	88	94	100	106
	.05	4	10	16	21	27	34	40	46	52	58	65	71	78	84	90	97	103	110	116
	.10	7	13	19	26	32	39	46	53	59	66	73	80	86	93	100	107	114	121	128
	.001	0	1	4	7	11	15	19	24	28	33	38	43	47	52	57	62	67	72	77
	.005	0	3	7	12	17	22	27	32	38	43	48	54	59	65	71	76	82	88	93
18	.01	1	5	10	15	20	25	31	37	42	48	54	60	66	71	77	83	89	95	101
	.025	3	8	13	19	25	31	37	43	49	56	62	68	75	81	87	94	100	107	113
	.05	5	10	17	23	29	36	42	49	56	62	69	76	83	89	96	103	110	117	124
	.10	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	78	85	92	99	107	114	121	129	136
	.001	0	1	4	8	12	16	21	26	30	35	41	46	51	56	61	67	72	78	83
	.005	1	4	8	13	18	23	29	34	40	46	52	58	64	70	75	82	88	94	100
19	.01	2	5	10	16	21	27	33	39	45	51	57	64	70	76	83	89	95	102	108
	.025	3	8	14	20	26	33	39	46	53	59	66	73	79	86	93	100	107	114	120
	.05	5	11	18	24	31	38	45	52	59	66	73	81	88	95	102	110	117	124	131
	.10	8	15	22	29	37	44	52	59	67	74	82	90	98	105	113	121	129	136	144
	.001	0	1	4	8	13	17	22	27	33	38	43	49	55	60	66	71	77	83	89
	.005	1	4	9	14	19	25	31	37	43	49	55	61	68	74	80	87	93	100	106
20	.01	2	6	11	17	23	29	35	41	48	54	61	68	74	81	88	94	101	108	115
	.025	3	9	15	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	99	106	113	120	128
	.05	5	12	19	26	33	40	48	55	63	70	78	85	93	101	108	116	124	131	139
	.10	8	16	23	31	39	47	55	63	71	79	87	95	103	111	120	128	136	144	152



تطلب منشوراتنا من :

عمان : مكتبة وائل - ش. الجمعية العلمية الملكية - مقابل بوابة الجامعة الأردنية الشمالي هاتف : +962 6 5335837 - فاكس : +962 6 5331661 - ص.ب (1746) - الجبيهة

عمان : دار وائل للنشر - شارع الجمعية العلمية الملكية - مبنى الجامعة الأردنية الأستثماري الثاني هاتف : +962 6 5338410 فاكس : +962 6 5338413

عمان : دار وائل للنشر - وسط البلد - مجمع الفحيص التجاري - تلفاكس : +962 6 4627627

عمان : مؤسسة تسنيم للنشر والتوزيع - مقابل كلية عمان الجامعية - تلفاكس : +962 6 4641162

الشارقة : مكتبة الجامعة - هاتف : +971 6 5726001 ص.ب (4540)

بيروت : دار الكتب العلمية تلفاكس : 804811 - 804810 5 961++ ص.ب (11 - 9424)

القاهرة : دار الكتاب الحديث - 94 شارع عباس العقاد - هاتف : +202 27 52 992

القاهرة : دار العلوم للنشر والتوزيع - هاتف : 202/5761400 - فاكس 202/25799907

الرياض : مكتبة جرير .. ليست مجرد مكتبة. المركز الرئيسي - هاتف : +966 14626000 الرياض - شارع عاليا - شارع الأمير عبد الله - شارع عقبة بن نافع - وكافة فروعها جدة مكة المكرمة - القسيم - الدمام - الإحساء - الدوحة - أبو ظبي - الكويت.

الرياض : مكتبة العبيكان - العليا - طريق الملك فهد مع تقاطع العروبة وكافة فروعها في الدمام - ابها - المدينة المنورة - الإحساء - القصيم - حفر الباطن - حائل .

الرياض : الدار الصولتية - هاتف : +9661 4968016 فاكس : +9661 4967536

جدة : مكتبة كنوز المعرفة للمطبوعات والأدوات المكتبية. جدة - الشرقية - شارع الستين هاتف : 6514222 - 6510421 فاكس : 6570628

جدة : الدار الصولتية - هاتف : +9662 6177877 - فاكس : +9662 6172364

جدة : دار حافظ للنشر والتوزيع - شارع الجامعة - هاتف : +9662 6892860

بغداد : مكتبة الذاكرة - الاعظمية - مجاور السفارة الهندية هاتف : 4257628 - تلفاكس : 4259987 - الثريا : +8821 621241714

الدوحة : مكتبة جرير .. ليست مجرد مكتبةطريق سلوى- تقاطع رمادا- هاتف: +974 4440212

المنامة : جامعة دلون للعلوم والتكنولوجيا - شارع المعارض هاتف : 17295500 -7294400 +9731

دمشق : دار المكتبي للنشر والتوزيع - حلبوني - هاتف : +963 11 2248433

رام الله : شركة جلاكسي لأنظمة المعلومات - هاتف : +97 02 2958444

الكويت : الكويت - مكتبة دار ذات السلاسل - هاتف : +965 2466255

الجزائر : الدار الجامعية للكتاب - ولاية بو مرداس - هاتف : +21324872766

الجزائر : أمين للتسويق الدولي للكتاب العلمي والجامعي تلفاكس : +21321 773355 ص.ب (75) حسين داي (16040) الجزائر

طرابلس : ليبيا - دار الرواد - ذات العماد - برج (4) هاتف : +21 821 3350332

غريان : ليبيا - المكتبة الجامعية - تلفاكس : +21 841 630730

صنعاء : الدار العلمية للكتب الجامعية - هاتف : 215054 - تلفاكس : +967 1 216649

الخرطوم : الدار العلمية للكتب الجامعية - هاتف : 83 466291 - فاكس : +249 1 83 491814

انواكشوط : موريتانيا - المكتبة التجارية الموريتانية الكبرى GRA.LI.CO-Ma هاتف : +222 5253009 ص.ب (341) انواكشوط

www.darwael.com E-mail:wael@darwael.com

ومن كافة دور النشر العربية والمكتبات في الوطن العربي



